



جبر و معادله

درسنامه ساده کردن عبارتهای جبری

۱. تبدیل عبارتهای کلامی به صورت جبری:

در ریاضی هر عبارت کلامی را می‌توانیم به صورت جبری بنویسیم به این ترتیب که به جای کلمه «عدد» از یکی از حروف انگلیسی به دلخواه استفاده کنیم.

$$a^1 = a$$

$$b \times 1 = b$$

هر عبارت کلامی را به صورت جبری بنویسید.

الف) هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می‌شود:

ب) حاصل ضرب هر عدد در یک برابر با خود عدد می‌شود:

۲. تبدیل عبارتهای جبری به صورت کلامی:

بر عکس مطلب قبلی هر عبارت جبری را به صورت کلامی می‌توانیم بنویسیم و کافیت به جای حروف انگلیسی از کلمه «هر عددی» استفاده کنیم.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$C \times C = C^2$$

هر عبارت جبری را به صورت کلامی بنویسید:

هر عدد غیر صفر به توان صفر، برابر با یک می‌شود.

حاصل ضرب هر عدد در خودش برابر با توان دوم (مربع) آن عدد می‌شود.

۳. تبدیل الگوهای عددی به عبارت جبری:

اگر یک الگوی عددی داشته باشیم برای مشخص کردن عدد n ام آن الگو می‌توانیم از یک عبارت جبری استفاده کنیم.

n امین عدد هر یک از الگوهای زیر را به صورت جبری بنویسید:

الف) ۲, ۴, ۶, ۸, ...

ب) ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...

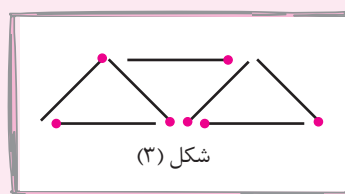
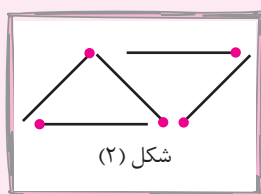
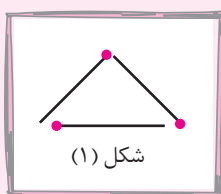
پاسخ: $2n$

$3n + 1$

۴. تبدیل الگوهای شکلی به عبارت جبری:

برای هر الگوی شکلی می‌توانیم که یک الگوی عددی تشکیل دهیم و سپس براساس مطلب قبلی یک عبارت جبری برای آن بنویسیم.

تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام را بنویسید.



۳, ۵, ۷, ...

$2n + 1$

پاسخ: الگوهای عددی تعداد چوب کبریت‌ها را می‌نویسیم:

اکنون می‌توانیم تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام را بنویسیم:

۵. جمله‌های جبری:

یک جمله جبری شامل یک یا چند متغیر (حروف انگلیسی) با توان‌های اعداد حسابی (۰, ۱, ۲, ۳, ...) است که در یکدیگر و ضرایب عددی ضرب شده‌اند.

مثال جدول زیر را کامل کنید.

ضریب عددی	توان متغیر	متغیر	جمله جبری
۵	۸	x	$5x^8$
-۹	۱۲	x	$-9x^{12}$
$\frac{1}{4}$	۱	a	$\frac{1}{4}a$
$0/7$	۱, ۲	b, c	$0/7bc^2$
۱	۲, ۳, ۴	x, y, z	$x^2y^3z^4$
۱۴	۰	—	۱۴

۶. جمله‌های متشابه:

جمله‌های جبری متشابه، جملاتی هستند که همه قسمت‌های حرفی آن‌ها یکی هستند.

$12x^2y^2$, $-16x^2y^2$, $6xy$, y^2x^2 , $5xy^3$

مثال دور جمله‌های متشابه خط بکشید.

۷. ساده کردن عبارتهای جبری:

برای ساده کردن عبارتهای جبری کافیست جملات متشابه را با یکدیگر جمع و تفریق کنیم.

الف) $5x - 6 + 7x - 7 = 12x - 13$

ب) $12a^2 - a - 8a^2 + 19a - 19 = 4a^2 + 18a - 19$

مثال هر یک از عبارات جبری زیر را ساده کنید.

۸. ضرب عدد در یک عبارت جبری:

اگر بخواهیم عددی را در یک عبارت جبری ضرب کنیم کافیست آن عدد را در ضریب عددی تک تک جملات آن عبارت جبری ضرب کنیم.

الف) $5(7x - 4y - 6) = 35x - 20y - 30$

ب) $3(x + y) + 4(2x - 1) = 3x + 3y + 8x - 4 = 11x + 3y - 4$

مثال هر یک از عبارات جبری مقابل را ساده کنید.

۹. حاصل ضرب دو جمله جبری:

هر گاه قرار باشد که دو جمله جبری را در هم ضرب کنیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضرایب را در هم ضرب می‌کنیم.

۲ متغیرهایی را که یکسان هستند براساس قاعده پایه مساوی در توان می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

۳ اگر متغیری که با بقیه متغیرها یکسان نبود وجود داشت؛ آن متغیر را بدون هیچ تغییری در پاسخ می‌نویسیم.

مثال هر یک از ضرب‌های زیر را انجام دهید:

الف) $(4a^2) \times (-6a^7) = -24a^9$

ب) $(-3ab) \times (-8a^3b^4) = 24a^4b^5$

پ) $(-6a^2x^2) \times (+2a^4xy) = -12a^6x^3y$

ت) $(\frac{3}{8}x^5a^3) \times (5b^4y^3) = \frac{15}{8}x^5a^3b^4y^3$

۱۰. ضرب یک جمله در یک عبارت جبری:

اگر بخواهیم یک جمله را در یک عبارت جبری ضرب کنیم مانند مطلب قبلی جمله جبری را در تک تک جمله‌های عبارت جبری ضرب می‌کنیم.

الف) $10d(3 - d + 4d^5) = 30d - 10d^2 + 40d^6$

ب) $4e(5e - 3f) = 20e^2 - 12ef$

مثال هر عبارت جبری مقابل را ساده کنید.

۱۱. ضرب دو عبارت جبری:

برای ضرب دو عبارت جبری باید تک تک جملات اولین عبارت جبری از سمت چپ را در تک تک جملات دومین عبارت جبری ضرب کنیم.

مثال ← هر عبارت جبری زیر را ساده کنید.

الف $(x+y)(x+y) = x^2 + \underline{xy} + \underline{yx} + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ب $(x-2)(x+2) = x^2 + \underline{2x} - \underline{2x} - 4 = x^2 - 4$

تمرین

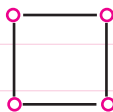


۱. عبارت کلامی را به صورت جبری و عبارت جبری را به صورت کلامی بنویسید:

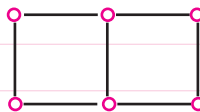
الف) یک به توان هر عدد، برابر یک می شود.

ب) $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

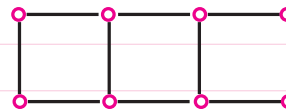
۲. در شکل m الگوی زیر چند دایره وجود دارد؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

۳. هر یک از عبارات جبری زیر را ساده کنید.

الف) $3xy - 4yx + 5x - 6y - xy =$

ب) $2(a+b) - 3(b-2a) =$

پ) $(3x^2y^3z) \times (-4xy^6t) \times (2y^5a) =$

ت) $5g(4g - 3a + 2) - 2g(3g^2 - 3) =$

ث) $(4x-1)(6x+5) =$

$x(y+z)$

۴. حاصل عبارات جبری مقابل را به کمک رسم شکل بنویسید.

۵. گسترده عدد دو رقمی $\overline{xy}$ را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

۶. محیط و مساحت مربعی به ضلع H را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

درسنامه پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

۱۲. پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری:

اگر به جای متغیر در یک عبارت جبری، یک عدد قرار دهیم، مقدار آن عبارت جبری به ازای آن عدد به دست می‌آید. دقت کنید که پس از جایگذاری با رعایت ترتیب عملیات در ریاضی، مقدار عبارت جبری را به دست می‌آوریم.

مثال مقدار عبارت جبری زیر را به ازای $x = 4$ به دست آورید:
 $3x + 8 \xrightarrow{x=4} 3(4) + 8 = 3 \times 4 + 8 = 12 + 8 = 20$
 همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار عبارت جبری $3x + 8$ اگر $x = 4$ باشد برابر با ۲۰ شده است و بدیهی است که اگر مقدار x تغییر کند مقدار $3x + 8$ نیز تغییر می‌کند.

۱۳. نمایش اعداد زوج و فرد به صورت یک جمله جبری:

اعداد زوج: به طور کلی اگر هر عدد طبیعی را در ۲ ضرب کنیم، عدد حاصل عددی زوج است بنابراین اگر این جمله را بخواهیم به صورت جبری نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:
 $2a$ یا $2b$ یا $2x$ یا $2k$ یا ...
 اعداد فرد: به همین ترتیب اگر از هر عدد زوج (مثلاً $2m$) یک واحد کم کنیم، عدد حاصل عددی فرد است که به صورت جبری می‌نویسیم:

مثال ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ (بدون ذکر مثال)

طبق توضیحات فرض کنید عدد $2m$ یک عدد زوج و عدد $2a$ یک عدد زوج دیگر است، اکنون آنها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$2a \times 2m = 2(a \times 2m) = 2(2am) = 2b$$

فرض کنید به جای این مقدار b قرار دهیم.

همانطور که دید حاصل ضرب هم به صورت $2b$ یعنی یک عدد زوج ظاهر شد.

تمرین

۷. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۷	۰	۱۲
$6x - ۱۳$			

۸. مقدار هر عبارت جبری زیر را به ازای $a = +5$ به دست آورید.

الف) $4a$:

ب) $a - 9$:

پ) $۱۳ - 3a$:

ت) $\frac{2}{5}a + 3$:

۹. در عبارت $y = 3 - x^2$ مقدار y را به ازای $x = -8$ به دست آورید.

۱۰. ثابت کنید که حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است. (بدون مثال عددی)

۱۱. در ریاضیات مساحت دایره از رابطه $s = \pi r^2$ به دست می‌آید.

اگر $\pi \approx 3$ باشد مساحت دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر را حساب کنید.

۱۴. تجزیه عبارت‌های جبری:

اگر عدد یا جمله‌ای را در یک عبارت جبری ضرب کنیم در ریاضیات به آن توزیع پذیری گویند.
 $a(b+c) = ab+ac$
 برعکس عمل بالا یعنی تبدیل یک عبارت جبری به صورت ضرب دو یا چند عبارت را تجزیه کردن می‌گویند:
 $ab+ac = a(b+c)$

مثال هر یک از عبارات جبری زیر را به ضرب تبدیل کنید. (تجزیه کنید).

الف) $xy+xz+xt = x(y+z+t)$ ب) $4a+4b = 4(a+b)$

۱۵. روش تجزیه کردن عبارت‌های جبری:

برای اینکه مراحل تجزیه کردن را بررسی کنیم، این مراحل را با ذکر یک مثال انجام می‌دهیم، مثلاً قرار است عبارت جبری $6m^2a + 8myb$ را تجزیه کنیم:

$$6m^2a = 2 \times 3 \times m \times m \times a$$

$$8myb = 2 \times 2 \times 2 \times m \times y \times b$$

$$6m^2a = 2 \times 3 \times m \times m \times a$$

$$8myb = 2 \times 2 \times 2 \times m \times y \times b$$

$$2 \times m = 2m$$

۲ قسمت‌های مشترک تمام جملات را جدا می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم:

۳ سپس پرانتزی باز می‌کنیم و هر چه از دو جمله باقی می‌ماند در آن می‌نویسیم و قسمت مشترک به دست آمده را قبل از پرانتز قرار می‌دهیم:

$$6m^2a + 8myb = 2m(3ma + 4yb)$$

$$9a^2b^2c + 6a^2bc - 12ab =$$

$$9a^2b^2c = 3 \times 3 \times a \times a \times b \times b \times c$$

$$6a^2bc = 3 \times 2 \times a \times a \times b \times c$$

$$12ab = 3 \times 2 \times 2 \times a \times b$$

$$9a^2b^2c + 6a^2bc - 12ab = 3ab(3a^2bc + 2ac - 4)$$

مثال عبارت جبری مقابل را تجزیه کنید:
پاسخ:

۱۶. تفاوت $a^2 + b^2$ و $(a+b)^2$:

در جبر نمی‌توانیم $(a+b)^2$ را به صورت $a^2 + b^2$ بنویسیم زیرا $(a+b)$ به توان ۲ یعنی: قبلاً هم خوانده‌ایم که برای ضرب دو عبارت جبری باید به صورت زیر عمل کنیم:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

که این حاصل با $a^2 + b^2$ برابر نیست.

مثال حاصل هر یک از عبارت زیر را به دست آورید:

الف) $(b-a)^2 = (b-a)(b-a) = b^2 - ba - ab + a^2 = b^2 - 2ab + a^2$

ب) $(3m-1)^2 = (3m-1)(3m-1) = 9m^2 - 3m - 3m + 1 = 9m^2 - 6m + 1$



۱۲. تجزیه کنید:

الف) $۱۲ab - ۱۶abc =$

ب) $۷m^2n + ۵mn^2 =$

پ) $۱۰xy^2 - ۵x^2y - ۱۵xy =$

۱۳. ابتدا صورت و مخرج هر کسر را به ضرب دو عبارت تجزیه و سپس آن را ساده کنید:

الف) $\frac{4xy - 8ya}{b^2y + y}$

ب) $\frac{x^3y^2 + x^4y^3}{2 + 2xy}$

۱۴. چرا مجموع دو عدد زوج، همواره زوج است؟ (بدون مثال، ثابت کنید).

۱۵. هر یک از عبارات جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(2x - 5)^2 =$

ب) $(3y + 4a)^2 =$

پ) $(x + 5)(x^2 + 2x - 3) =$

درسنامه معادله

۱۷. معادله:

یک تساوی جبری که به ازای بعضی مقادیر برقرار باشد را معادله گویند.

به طور مثال تساوی جبری $(x + 5 = 12)$ فقط وقتی صحیح و برقرار است که مقدار x برابر با ۷ باشد و به ازای هیچ عدد دیگری برقرار نیست.

۱۸. روش حل معادله:

در هر معادله دو سری جمله وجود دارد که عبارتند از:

۱) جملات معلوم: که عددها هستند.

۲) جملات مجهول: که جملاتی هستند که شامل متغیر می باشند.

به طور مثال در معادله $4x - 8 = 13$ جملات -8 و 13 جملات معلوم و جمله $4x$ جمله مجهول می باشد.

که برای حل معادله باید جملات مجهول را در یک طرف تساوی و جملات معلوم را در طرف دیگر تساوی قرار داد با این شرط که اگر جمله ای به طرف دیگر تساوی رفت قرینه شود.

به طور مثال در معادله $4x - 8 = 13$ ، جمله $4x$ را چون مجهول است در یک طرف تساوی نگه می داریم و جمله 13 را چون معلوم است در طرف دیگر تساوی نگه می داریم که با این حساب که به طرف دیگر تساوی نرفته اند علامتشان عوض نمی شود و جمله -8 باید برود سمتی که جمله 13 قرار دارد که چون به طرف دیگر تساوی می رود باید علامتش قرینه شود:

$$4x - 8 = 13$$

$$4x = 13 + 8$$

و سپس هر طرف تساوی را با توجه به جملات متشابه ساده کرده و عدد معلوم را بر ضریب متغیر (x) تقسیم می کنیم تا مقدار مجهول

$$x = \frac{21}{4}$$

 $4x = 21$ که در این x است به دست آید:

مثال معادله زیر را حل کنید:

$$19x + 4 = -26x + 10 \Rightarrow 19x + 26x = 10 - 4 \Rightarrow 45x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{45}$$

۱۹. روش حل معادله های کسری:

معادله های کسری را می توان مانند آنچه توضیح داده شد حل کرد اما روش دیگری نیز برای حل آن وجود دارد که به صورت زیر می باشد:

ابتدا هر دو طرف معادله را در ک.م.م. مخارج ها ضرب می کنیم تا معادله کسری به یک معادله غیر کسری تبدیل شود و سپس مانند آنچه قبلاً یاد گرفتیم معادله را حل می کنیم.

$$\frac{3}{4}x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}$$

مثال معادله مقابل را حل کنید.

$$12 \times \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \right) = 12 \times \left(-\frac{1}{3} \right) \Rightarrow 12 \times \frac{3}{4}x - 12 \times \frac{5}{6} = 12 \times \frac{-1}{3} \Rightarrow 9x - 10 = -4 \Rightarrow 9x = -4 + 10 \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۲۰. حل مسئله به کمک معادله:

برای حل مسئله ها به کمک معادله یک نکته کلیدی وجود دارد و آن این است که بعد از خواندن مسئله باید، چیزی که مسئله از ما خواسته است را مشخص کنیم که آن مقدار مجهول است. سپس براساس شرایط مسئله معادله را تنظیم و حل می کنیم.

مثال ۱۰ عرض مستطیلی به طول ۸ و محیط ۲۰ را به کمک معادله به دست آورید:

عرض مستطیل = x

محیط مستطیل = $2 \times (\text{عرض} + \text{طول})$

$$(8 + x) \times 2 = 20$$

$$\rightarrow 2x + 16 = 20 \rightarrow 2x = 20 - 16 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

مثال ۲۰ از چهار برابر عددی شش واحد کم کردیم و حاصل برابر با ۳۶ شد، آن عدد چند است؟

آن عدد = x

$$\rightarrow 4x - 6 = 36 \rightarrow 4x = 36 + 6 \rightarrow 4x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{4} = \frac{21}{2}$$

مثال ۳۰ حاصل جمع ۳ عدد طبیعی متوالی برابر با ۸۴ شده است. عدد کوچکتر چند است؟

عدد کوچکتر = x

$$\rightarrow x + x + 1 + x + 2 = 84 \rightarrow 3x + 3 = 84 \rightarrow 3x = 81 \rightarrow x = 27$$

مثال ۴۰ مجموع کتاب های رضا و هادی ۵۴ کتاب است. اگر رضا از ۴ برابر کتاب های هادی ۴ کتاب بیشتر داشته باشد تعداد کتاب های هادی را حساب کنید.

تعداد کتاب های هادی = x

تعداد کتاب های رضا = $4x + 4$

$$4x + 4 + x = 54$$

$$\rightarrow 5x = 50 \rightarrow x = 10$$

تمرین



۱۶. هر یک از معادله های زیر را حل کنید.

الف) $3(2x - 4) - 16x = 0$

ب) $4(5x - 3) - 2(x + 1) = 3(-7x + 2)$

۱۷. هر یک از معادله های کسری زیر را حل کنید:

الف) $\frac{1}{8} - \frac{1}{6}x = -2$

ب) $\frac{x+6}{6} = \frac{1-2x}{5}$

مسئله های زیر را به کمک نوشتن معادله حل کنید.

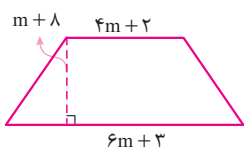
۱۸. به نصف عددی ۳ واحد اضافه کردیم، حاصل برابر ۱۲ شد، آن عدد را بیابید.

۱۹. حاصل جمع چهار عدد زوج متوالی برابر با ۱۰۰ شده است. عدد کوچکتر چند است؟

۲۰. هنگام تولد حلما، خواهرش سها ۶ ساله بود. بعد از گذشت چند سال سن سها چهار برابر سن خواهرش حلما خواهد شد؟

آزمون فصل چهارم

۵ | نمره

۱	درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید. الف) مساحت مربع به ضلع a برابر با $4a$ است. ب) $x - y = -(y - x)$ پ) جواب معادله $\frac{3}{8}f = \frac{1}{4}$ برابر با $\frac{2}{3}$ است. ت) یک تساوی جبری که به ازای همه مقادیر اقرار برقرار باشد را معادله گویند. درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐
۱	جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید. الف) جمله‌هایی که همه قسمت‌های حرفی آن‌ها یکی هستند، جمله‌های نامیده می‌شوند. ب) حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی است. پ) از سه برابر عددی ۳ واحد کم کردیم که حاصل برابر با ۶۹ شده است آن عدد است. ت) مجذور عدد b به صورت جبری برابر با است.
۱	گزینه صحیح را انتخاب کنید الف) مساحت ذوزنقه مقابل به صورت یک عبارت جبری کدام است؟ (تیزهوشان تهران - دی ۱۴۰۲)  (۱) $\frac{10m^2 + 40}{2}$ (۲) $\frac{10m + 88m^2 + 40}{2}$ (۳) $\frac{10m^2 + 88m + 40}{2}$ (۴) $10m^2 + 88m + 40$ ب) مقدار عبارت جبری $5x^2 - 2xy + y^3$ به ازای $(x = -3 \text{ و } y = -2)$ برابر با کدام عدد است؟ (تیزهوشان ایلام - فروردین ۱۴۰۰) (۱) ۲۵ (۲) -۲۵ (۳) ۱۵ (۴) -۱۵ پ) کدام گزینه پاسخ معادله $x^2 = 64$ است؟ (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ± 8 (۴) $\sqrt{8}$ ت) n آمین شکل الگوی زیر چند چوب کبریت دارد؟  (۱) $4n$ (۲) $3n$ (۳) $4n - 1$ (۴) $3n + 1$
۵/۵	الف) عبارت جبری روبرو را ساده کنید. (تیزهوشان سمنان - دی ۱۴۰۲) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$
۵/۷۵	ب) مقدار عددی عبارت $a^2 - b^2$ را به ازای $a = 1$ و $b = -3$ به دست آورید.
۵/۷۵	الف) عبارت جبری زیر را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید. (تیزهوشان شهر تهران - دی ۱۴۰۲) $24x^2 - 18x$
۵/۷۵	ب) معادله زیر را حل کنید. $\frac{x+1}{2} + \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{4}$
۱	چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است؟

۰/۷۵	(تیزهوشان البرز - دی ۱۴۰۲)	کسر مقابل را ساده کنید.	۷.
	$\frac{x^2y^2 - xy^2}{xy - x^2y^2}$		
۰/۷۵	(تیزهوشان پوشهر - فردار ۱۴۰۲)	الف) عبارت مقابل را ساده کنید.	۸.
	$(5x - 9)^2$		
۰/۷۵		ب) معادله مقابل را حل کنید.	
	$\frac{1}{2} - \frac{2x-1}{3} = 1/5$		
۱		۹. از عددی، $\frac{2}{3}$ آن عدد را کم کردیم، حاصل دو واحد کمتر از نصف آن عدد شد. آن عدد را به کمک نوشتن معادله بیابید.	

یادداشت: