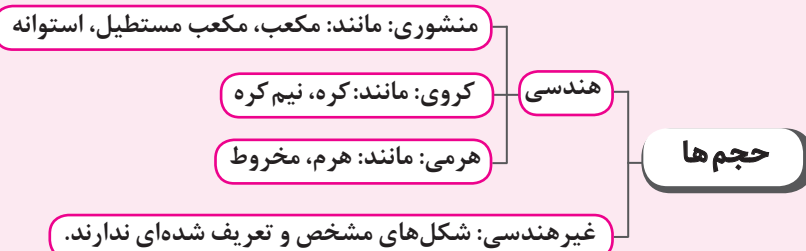




سطح و حجم

حجم‌های هندسی

۱- حجم‌ها:



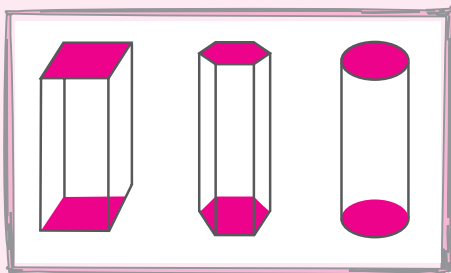
تذکر



بعضی از حجم‌های هندسی ترکیبی از منشورها، کره‌ها و هرم‌ها هستند.

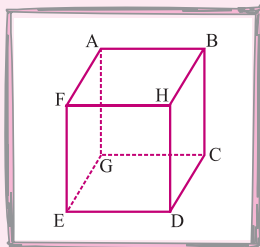
۲- حجم‌های منشوری:

تمام حجم‌های منشوری، حجم‌هایی هستند که بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.



۳- اجزای منشورها:

- ۱ قاعده: به دو سطح موازی که حجم‌های منشوری بین آن‌ها قرار می‌گیرند، قاعده می‌گویند.
- ۲ وجه‌های جانبی: به سطح‌های اطراف قاعده‌ها وجه‌های جانبی گویند.
- ۳ وجه: به تمام قاعده‌ها و وجه‌های جانبی، وجه گویند.
- ۴ یال: به محل برخورد سطح‌ها یال گویند.
- ۵ رأس: به نقطه برخورد هر سه سطح، رأس گویند.



مثال در مورد مکعب مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف. چند قاعده دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

۲ قاعده دارد. $EGCD$, $ABHF$

ب. چند وجه جانبی دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

۴ وجه جانبی دارد. $BCDH$, $DHFE$, $AFEG$, $ABCG$

پ. چند وجه دارد؟

۶ وجه دارد. $2 + 4 = 6$

ت. چند یال دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

۱۲ یال دارد. AG , BC , HD , FE

ث. چند رأس دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

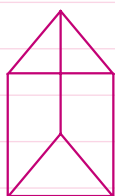
۸ رأس دارد.

AB , BH , HF , FA

GC , CD , DE , EG

A , B , C , D , E , F , G , H

تمرین



۱. الف. حجم چه نام دارد؟

ب. چند وجه جانبی دارد؟

پ. چند یال دارد؟

ت. چند رأس دارد؟

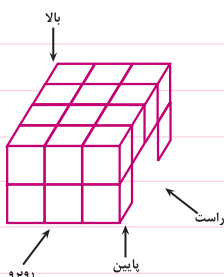
۲. الف. اگر یک استوانه را موازی با قاعده‌هایش برش بزنیم، سطح مقطع آن به چه شکلی دیده می‌شود؟

ب. یک استوانه از دید بالا چه شکلی است؟

پ. اگر یک مکعب را روی یک استوانه طوری قرار دهیم که رأس‌های مکعب روی محیط قاعده استوانه قرار گیرد، این حجم هندسی

از بالا به چه شکلی دیده می‌شود؟ آن را رسم کنید.

۳. حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می‌کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می‌شود؟



محاسبه حجم‌های منشوری

۴- رابطه ریاضی به دست آوردن حجم منشورها:

برای به دست آوردن حجم هر منشوری کافیه از رابطه مقابل استفاده کنیم: $V = s.h \Rightarrow$ ارتفاع $\times$ مساحت قاعده = حجم منشور

$$V = s.h$$

مثال حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

$$V = (10 \times 10 \times 3) \times 50$$

$$V = 300 \times 50 = 15000 \text{ cm}^3 \text{ سانتی‌متر مکعب}$$

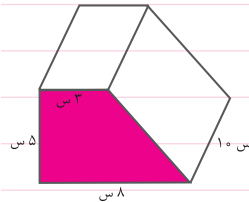


۴. حجم مکعبی به ضلع ۲۰ سانتی متر چند سانتی متر مکعب است؟

۵. حجم مکعب مستطیلی به طول ۳۰ سانتی متر، عرض ۲۰ سانتی متر و ارتفاع ۱۵ سانتی متر را حساب کنید.

۶. حجم استوانه‌ای به قطر قاعده ۲۰۰ سانتی متر و ارتفاع ۵۰۰ سانتی متر را حساب کنید. ($\pi \simeq ۳$)

۷. حجم منشور مقابل را حساب کنید.



۸. حجم یک منشور سه پهلوی که قاعده آن مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ می‌باشد و ارتفاع آن ۱۰ باشد حساب کنید.

۹. در کارتنی به شکل مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع به ترتیب ۷۲ و ۴۵ و ۲۱ سانتی متر چند جعبه به شکل مکعب مستطیل

و به ابعاد ۲۴ و ۱۵ و ۷ سانتی متر جای می‌گیرد؟

مساحت جانبی و کل

۵- رابطه ریاضی به دست آوردن مساحت جانبی منشورها:

به مجموع مساحت‌های هر یک از وجه‌های جانبی هر منشوری مساحت جانبی آن منشور گویند که برای محاسبه آن کافیست از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$S = p \cdot h \quad \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی منشور}$$

مثال مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتی متر و ارتفاع ۵۰ سانتی متر را حساب کنید ($\pi \simeq ۳$)

$$S = (۲ \times ۱۰ \times ۳) \times ۵۰ = ۶۰ \times ۵۰ = ۳۰۰۰ \text{ cm}^2 \quad \text{سانتی متر مربع}$$

۶- رابطه ریاضی برای به دست آوردن مساحت کل منشورها:

برای به دست آوردن مساحت کل هر منشوری کافیست که مساحت جانبی آن را با مساحت ۲ تا قاعده منشور جمع کنیم:

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + ۲ S_{\text{قاعده}} \quad S_{\text{کل}} = \text{مساحت جانبی} + ۲ \times \text{مساحت قاعده}$$

مثال مساحت کل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتی متر و ارتفاع ۵۰ سانتی متر را حساب کنید. ($\pi \simeq ۳$)

$$S_{\text{کل}} = ph + ۲ S_{\text{قاعده}}$$

$$S_{\text{کل}} = (۲ \times ۱۰ \times ۳) \times ۵۰ + ۲ \times (۱۰ \times ۱۰ \times ۳)$$

$$S_{\text{کل}} = ۶۰ \times ۵۰ + ۲ \times ۳۰۰ = ۳۰۰۰ + ۶۰۰ = ۳۶۰۰ \text{ cm}^2 \quad \text{سانتی متر مربع}$$

تمرین

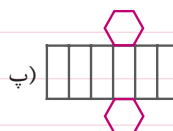
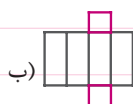
۱۰. حوضی مستطیل شکل به طول ۳ متر، عرض ۲ متر و ارتفاع ۱ متر داریم.

اگر بخواهیم بدنه‌های داخلی این حوض را رنگ کنیم، سطحی که باید رنگ شود چند متر مربع می‌باشد؟

۱۱. می‌خواهیم بدنه، کف و سقف منبع آبی به شکل استوانه را رنگ کنیم، اگر هر سانتی‌متر مربع آن نیاز به ۱۵/۰ کیلوگرم رنگ داشته

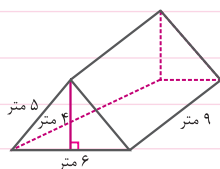
باشد با توجه به اینکه شعاع قاعده این منبع ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۰۰ سانتی‌متر است به چند کیلوگرم رنگ نیاز داریم؟ ($\pi \approx 3$)

۱۲. هر کدام از تصاویرهای زیر، گسترده چه حجم هندسی می‌باشد؟



۱۳. یک چادر مسافرتی بزرگ مطابق شکل مقابل موجود است. چند متر مربع پارچه برای ساخت آن

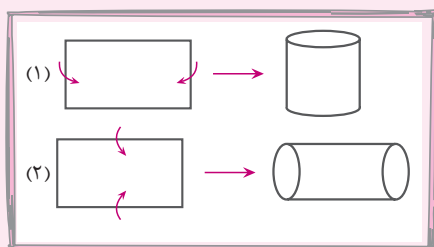
به کار رفته است؟



حجم و سطح

۷- ساخت استوانه به کمک کاغذ مستطیل شکل:

با توجه به شکل‌های (۱) و (۲) اگر یک کاغذ مستطیل شکل را لوله کنیم، به شکل استوانه در می‌آید، همانطور که ملاحظه می‌کنید در هر دو حالت مساحت جانبی استوانه‌ها برابر است چون برابر با مساحت کاغذ مستطیل شکل است. اما حجم حالت (۱) از حجم حالت (۲) بیشتر است.



مثال در شکل‌های بالا اگر طول مستطیل ۱۲ و عرض آن ۶ باشد، حجم استوانه‌ها را در هر دو حالت به دست آورید: ($\pi \approx 3$)

۶ = عرض مستطیل = ارتفاع استوانه: حجم (۱)

۱۲ = طول مستطیل = ارتفاع استوانه: حجم (۲)

۱۲ = طول مستطیل = محیط قاعده استوانه

۶ = عرض مستطیل = محیط قاعده استوانه

۲ = شعاع قاعده $\Rightarrow$ ۴ = قطر قاعده $\Rightarrow$ ۱۲ = ۳ × قطر قاعده

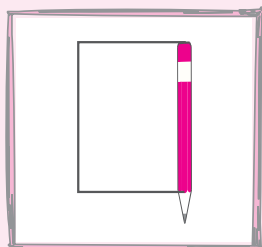
۱ = شعاع قاعده $\Rightarrow$ ۲ = قطر قاعده $\Rightarrow$ ۶ = ۳ × قطر قاعده

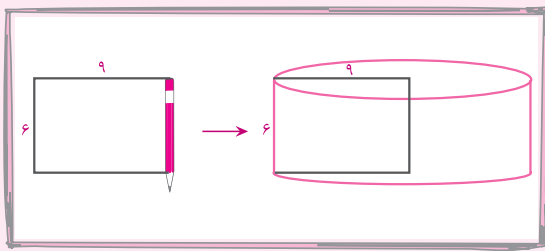
$V_{(1)} = S.h = 2 \times 2 \times 3 \times 6 = 72$

$V_{(2)} = S.h = 1 \times 1 \times 3 \times 12 = 36$

۸- ساخت استوانه از طریق دوران مستطیل:

با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می‌شود. حال اگر این سطح، مستطیل باشد، حجم حاصل یک استوانه است. به طور مثال اگر مطابق شکل مقابل کاغذی را دور مدادی بچسبانیم و آن را بچرخانیم، با چرخاندن مستطیل یک استوانه پدید می‌آید.





مثال یک کاغذ مستطیل شکل به طول ۹ و عرض ۶ را حول عرض

آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید. ($\pi \simeq 3$)

$$V = Sh$$

$$V = 9 \times 9 \times 3 \times 6 = 1458$$

تمرین

۱۴. یک کاغذ مستطیل شکل را به طول ۱۸ و عرض ۱۲ طوری لوله می‌کنیم که عرض‌های آن بهم بچسبند و یک استوانه ایجاد شود. ($\pi \simeq 3$)

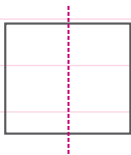
الف) حجم استوانه را حساب کنید.

ب) مساحت جانبی استوانه را حساب کنید.

۱۵. یک کاغذ مستطیل شکل به طول ۸ و عرض ۵ را حول طول آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۶. شکل مقابل، مربعی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر می‌باشد اگر آن را مطابق شکل حول خط چینی که از وسط اضلاع

آن عبور کرده است دوران دهیم، حجم جسم حاصل را بیابید. ($\pi \simeq 3$)

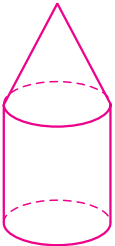
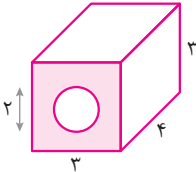
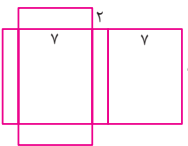


۱۰ | نمره

آزمون فصل ششم

۶

۱	درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید. الف) در منشور n پهلوی، تعداد رأس‌ها $2n$ و تعداد یال‌ها $2n$ است. (تیزهوشان کرمان - فرداد ۱۴۰۲) درست ☐ نادرست ☐ ب) استوانه، منشوری با قاعده دایره است. (تیزهوشان سیستان و بلوچستان - فرداد ۱۴۰۲) درست ☐ نادرست ☐ پ) در دوران کاغذ مستطیل شکل حول طولش، عرض مستطیل به عنوان شعاع قاعده استوانه حاصل خواهد بود. درست ☐ نادرست ☐ ت) برای ساختن مکعبی به ضلع ۲ سانتی‌متر، ۲۴ سانتی‌متر مربع مقوا لازم است. درست ☐ نادرست ☐ (تیزهوشان فارس - فرداد ۱۴۰۲)
۲	جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید. الف) حجم‌های بین دو سطح موازی قرار می‌گیرند. ب) اگر شعاع قاعده استوانه‌ای را نصف کنیم، حجم آن می‌شود. ب) منشور سه پهلو از بالا به شکل دیده می‌شود. ت) مکعب مستطیل دارای یال است. (تیزهوشان یزد - فرداد ۱۴۰۲) (تیزهوشان سیستان و بلوچستان - فرداد ۱۴۰۲)

۱		۳. گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) حجم مقابل، ترکیبی از کدام حجم‌ها است؟ (۱) منشوری - کروی (۲) کروی - هرمی (۳) هرمی - منشوری (۴) کروی - استوانه ب) منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن نیم متر و ارتفاعش ۲ متر است. این چند لیتر آب در این منبع جا می‌گیرد؟ ($\pi \simeq 3$) (۱) $1/5$ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴) ۱۵۰۰۰ پ) شعاع قاعده یک استوانه را ۳ برابر و ارتفاع را ۴ برابر کرده‌ایم. حجم آن چند برابر می‌شود؟ (تیزهوشان گیلان - فردا ۱۴۰۲) (۱) ۱۲ (۲) ۴۸ (۳) ۷ (۴) ۳۶ ت) برای ساخت مکعبی به ضلع ۳۰ سانتی‌متر چند سانتی‌متر مربع مقوا لازم داریم؟ (۱) ۲۷۰۰ (۲) ۹۰۰ (۳) ۵۴۰۰ (۴) ۳۶۰۰
۰/۵	۴. یک قطعه فلز را در ظرف آبی به شکل مکعب مستطیل به اضلاع قاعده ۴۸ و ۶۰ سانتی‌متر انداخته‌ایم و کاملاً به زیر آب فرو رفته است. در نتیجه ارتفاع آب ۴ سانتی‌متر بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید.	(تیزهوشان آذربایجان شرقی - فردا ۱۴۰۲)
۰/۷۵	۵. مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ سانتی‌متر را ۹۰ درجه حول عرض آن دوران داده‌ایم. حجم شکل به دست آمده را محاسبه کنید.	(تیزهوشان گیلان - فردا ۱۴۰۲)
۱/۵	۶. حجم شکل مقابل را حساب کنید.	(تیزهوشان کردستان - فردا ۱۴۰۲)
	۷. منشوری با قاعده پنج ضلعی موجود است که طول اضلاع قاعده آن بر حسب سانتی‌متر ۲ و ۵ و ۷/۵ و ۷ و ۸/۵ است. اگر ارتفاع این منشور ۸ سانتی‌متر باشد مساحت جانبی آن چند سانتی‌متر مربع است؟	(تیزهوشان فرمشور - فردا ۱۴۰۲)
۱	۸. درون یک مکعب مستطیل به ابعاد ۴ و ۳ و ۲ سانتی‌متر را پر از مایع کرده‌ایم. سپس مایع درون آن را در یک استوانه به شعاع قاعده ۶ سانتی‌متر می‌ریزیم. آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ ($\pi \simeq 3$)	(تیزهوشان کرمان - فردا ۱۴۰۲)
۱	۹. شکل مقابل گسترده یک مکعب مستطیل است. اگر ابعاد این مکعب مستطیل را بر حسب متر در نظر بگیریم مشخص کنید:	الف) حجم این مکعب مستطیل چند لیتر است؟ ب) مساحت کل آن چند مترمربع است؟
	۱۰. یک مقوا به طول و عرض ۱۲ و ۸ سانتی‌متر را به شکل یک استوانه به ارتفاع ۸ سانتی‌متر در آوردیم. حجم این استوانه را حساب کنید. ($\pi \simeq 3$)	
۰/۵	۱۱. در مکعب مستطیلی به طول و عرض و ارتفاع ۲۴ و ۱۸ و ۱۵ سانتی‌متر چند مکعب به ضلع ۳ سانتی‌متر جای می‌گیرد؟	