

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل اول

۱. الف) درست
ب) درست
ت) نادرست
ب) نادرست
مجموعه‌های $\{\emptyset\}$, $\{0\}$, $\{0, \emptyset\}$ تهی نیستند و فقط مجموعه‌های $\{\}$ و \emptyset تهی هستند.

۲. الف) ۶
ب) یک: چون در آکولاد بزرگتر یک عضو وجود دارد در واقع ۱ و ۲ اعضای مجموعه کوچکتر هستند.

پ) ۲
ت) $73 \in I$

۳. الف) درست
ب) درست
ت) نادرست

۴. $A = \left\{ \frac{2}{3}, 7, 8, \sqrt{25} \right\}$
 $B = \{5, 8, 1/5, 7\}$

۵. $x = 5^2 + 1 = 26$
 $y = \sqrt{9} = 3$
 $x + y = 26 + 3 = 29$

۶. $x = -2 \rightarrow x^2 = (-2)^2 = 4$

۷. الف) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2\}$

ب) $C = \{-3, -2\}$ یا هر دو عضو دیگری از A که از -4 بزرگتر باشد
پ) $D = \{-2, 2, 4\}$ یا هر عضو دیگری از B که مضرب صحیح ۲ باشند.
تذکره: برای بدست آوردن مضرب صحیح یک عدد کافیست آن عدد را در اعداد صحیح ضرب کنیم.

ت) \subseteq (الف)
ت) \supseteq (ب)
ب) \notin (پ)
ب) \in (الف)
۸. $\{\}, \{5\}, \{9\}, \{5, 9\}$

۹. $A = \{-5, -4, -3, \dots\}$
 $B = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$
 $H = \{24, 19, 14, 9\}$

$k = \left\{ \frac{-8}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-6}{3}, \frac{-5}{3} \right\}$

۱۰. برای به دست آوردن $A - B$ باید A را بنویسیم و هر عضوی از B که در A هست در A خط بزنییم و آنچه که در A می‌ماند پاسخ سؤال می‌شود.

الف) $A - B = \{-4, -5, -6, \cancel{3}, \cancel{4}\} - \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} = \{-4, -5, -6\}$
ب) $A - (A - B) =$

$\{\cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, -3, -2\} - \{-4, -5, -6\} = \{-3, -2\}$

۱۱. $A \cap B = \{2, 3, 4\}$

$(A \cap B) - C = \{2, 3, 4\} - \{0, 2\} = \{3, 4\}$

۱۲. $A - B = \{10, 11, 12, 13, 4\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{10, 11, 12, 13\}$

الف) $(A - B) \cap C = \{10, 11, 12, 13\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset$

ب) $n(A \cup B) = 6$

۱۳. الف) $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ب) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

پ) $A \cap B = \{1, 2\}$ ت) $A - B = \{-2, -1, 0\}$

ث) $B - A = \{3, 4\}$

۱۴. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{5\}$

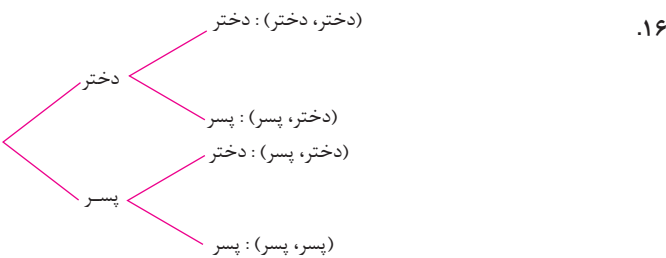
$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

۱۵. چون تاس را دو بار می‌اندازیم و هر بار ۶ حالت ممکن است پیش آید پس

تعداد حالت‌های ممکن می‌شود: $n(s) = 6 \times 6 = 36$

اینکه هر دو عدد رو شده ۳ باشد فقط یک حالت است:

$n(A) = 1$
 $P(A) = \frac{1}{36}$



$\frac{n(A)=2}{n(S)=4} \rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

۱۷. $\frac{n(S)=8}{n(A)=4} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

۱۸. حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده ۴ می‌باشد: $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$
که ۳ حالت است و کل حالت‌ها هم که $6 \times 6 = 36$ می‌باشد پس:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل دوم

۱. $\frac{1}{9} < ? < ? < ? < \frac{2}{7}$

$\frac{7}{63} < ? < ? < ? < \frac{18}{63}$

$\frac{7}{63} < \frac{8}{63} < \frac{9}{63} < \frac{10}{63} < \frac{11}{63}$

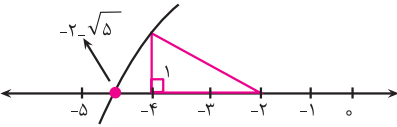
که البته به جای پاسخ‌های نوشته شده $\frac{12}{63}, \frac{11}{63}, \dots$ هم صحیح می‌باشد.

۹. $3 < ? < ? < 4$
 $\sqrt{6} < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$

یا هر عدد درست دیگر پذیرفته می‌شود.

۱۰. $\sqrt{6} < ? < ? < ? < 3$
 $\sqrt{6} < ? < ? < ? < \sqrt{9}$
 $\sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{8/1} < \sqrt{8/2} < \sqrt{9}$

یا هر عدد درست دیگر پذیرفته می‌شود.



۱۲. ۲, ۳

۱۳. $|-6| + |-4 + 7 - 3| =$
 $6 + |0| = 6 + 0 = 6$

۱۴. $|-a^2 - 2b| + 2ab = | -(-5)^2 - 2(10) | + 2(-5)(10)$
 $= |-25 - 20| + (-150) = |-45| + (-150) = 45 + (-150) = -105$

۱۵. $|\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 6| + |-3| =$
 عددی مثبت است عددی منفی است
 پس پس
 $\sqrt{5} - 2 + 6 - \sqrt{5} + 3 = -2 + 6 + 3 = 7$

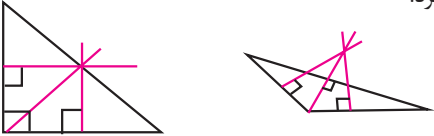
۱۶. $|12 - 18 \div 6 \times 3 - 3 \times (-2)| =$
 $|12 - 3 \times 3 - 3 \times (-4)| = |12 - 9 - 12| = |-9| = 9$

۱۷. الف) $|5 - \sqrt{28}| = -(5 - \sqrt{28}) = \sqrt{28} - 5$
 ب) $\sqrt{(1 - \sqrt{8})^2} = |1 - \sqrt{8}| = -(1 - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - 1$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل سوم

۱. خیر، چون سؤال در مورد هر مثلثی سؤال کرده اما در اثبات فقط در مثلث متساوی‌الاضلاع، اثبات را انجام داده است.

۲. خیر؛ زیرا در مثلث‌های قائم‌الزاویه محل برخورد عمود منصف‌ها در وسط وتر قرار می‌گیرد و در مثلثی که یک زاویهٔ بازدار محل برخورد عمود منصف‌ها بیرون مثلث قرار می‌گیرد.



۳. گزینه «ب» زیرا با دلیل مطمئن و واقعی و براساس دانسته‌های درست و مطمئن استدلال می‌کند.

۲. $-\frac{2}{5} < ? < -\frac{1}{3}$

$-\frac{6}{15} < ? < -\frac{5}{15}$
 $-\frac{12}{30} < -\frac{11}{30} < -\frac{10}{30}$

$\frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \frac{30}{36}, \frac{9 \times 3}{12 \times 3} = \frac{27}{36}, \frac{8 \times 4}{9 \times 4} = \frac{32}{36}$
 $\frac{32}{36} > \frac{30}{36} > \frac{27}{36} \Rightarrow \frac{8}{9} > \frac{5}{6} > \frac{9}{12}$

الف) $\frac{3/00}{28} \left| \frac{7}{0/42857142} \Rightarrow \frac{3}{7} = 0/428571$
 $\frac{-20}{14}$
 $\frac{60}{56}$
 $\frac{40}{35}$
 $\frac{50}{49}$
 $\frac{10}{7}$
 $\frac{30}{28}$
 $\frac{20}{20}$
 $\frac{14}{6}$

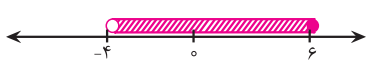
ب) $\frac{24}{45} = \frac{8}{15} = 0/5333$

$\frac{8/000}{75} \left| \frac{15}{0/5333} \right.$
 $\frac{45}{50}$
 $\frac{45}{50}$
 $\frac{45}{50}$
 $\frac{45}{5}$

۵. $\frac{1-6}{4} \div \frac{8}{4} = \frac{1-30}{4} \div \frac{40}{-12} = \frac{22}{-12}$

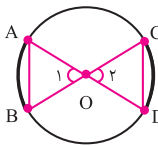
$\frac{9}{4} \div \frac{-11}{20} = \frac{9}{4} \div \frac{3}{4 \times 11} = \frac{9}{4} \div \frac{33}{44} = \frac{9}{4} \times \frac{44}{33} = \frac{105}{11}$

۶. الف) گویا ب) گنگ پ) گویا



۷. $\{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$

۱۳. با مطالعه دقیق سؤال شکل مناسبی را رسم می‌کنیم:
سپس فرض و حکم را مشخص می‌کنیم:



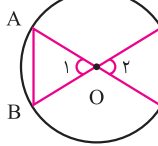
فرض	$\widehat{AB} = \widehat{CD}, \overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OB} = \overline{OD}$
حکم	$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

اگر ثابت کنیم دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند طبق اجزای متناظر پس وترهای AB و CD نیز با هم برابر هستند:

شعاع دایره $\overline{OA} = \overline{OC}$
 زاویه‌های مرکزی روبروی کمان‌های برابر $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$
 شعاع‌های دایره $\overline{OB} = \overline{OD}$

اجزای متناظر $\rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

۱۴



فرض	$\widehat{AB} = \widehat{CD}, \overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OB} = \overline{OD}$
حکم	$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

فرض مسئله $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
 شعاع‌های دایره $\overline{OA} = \overline{OC}$
 شعاع‌های دایره $\overline{OB} = \overline{OD}$

اجزای متناظر $\rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

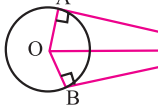
۱۵

چون زاویه‌های $\widehat{A}_1, \widehat{B}_1$ برابرند، $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ متتام آنها نیز برابرند

اضلاع روبروی مستطیل $\overline{AD} = \overline{BC}$
 $\widehat{D} = \widehat{C} = 90^\circ$

اجزای متناظر $\rightarrow \overline{AF} = \overline{EB}$

۱۶



فرض	$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, \overline{OA} = \overline{OB}$
حکم	$\overline{MA} = \overline{MB}$

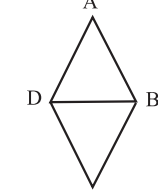
$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$
 شعاع دایره $\overline{OA} = \overline{OB}$

اجزای متناظر $\rightarrow \overline{MA} = \overline{MB}$

۱۷

فرض	$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$
حکم	$\widehat{A} = \widehat{C}$

توجه: البته برای اثبات این موضوع در مطلب شماره ۶ به روش دیگری نیز استدلال بیان شده است.



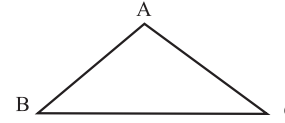
فرض مسئله $\overline{AB} = \overline{BC}$
 فرض مسئله $\overline{AD} = \overline{DC}$
 ضلع مشترک $\overline{DB} = \overline{DB}$

اجزای متناظر $\rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

با اثبات هم نهشتی مثلث‌های ADC و ABC نیز می‌توانیم ثابت کنیم \widehat{D} و \widehat{B} نیز با هم برابرند.

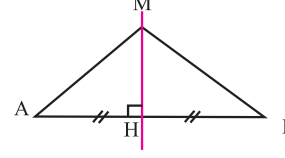
۴

فرض: $\widehat{A} > \widehat{C}$
 حکم: $BC > AB$



۵

فرض: $\begin{cases} MH \perp AB \\ \overline{AH} = \overline{HB} \end{cases}$
 حکم: $\overline{AM} = \overline{MB}$



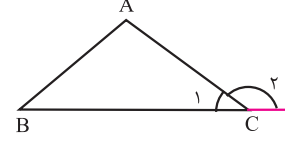
ضلع مشترک در هر دو مثلث $\overline{MH} = \overline{MH}$: استدلال
 چون MH عمود منصف است. $\overline{HA} = \overline{HB}$
 $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ$

بر اساس برابری اجزای متناظر $\rightarrow \triangle MAH \cong \triangle MBH$
 تعمیم می‌دهیم

هر نقطه روی عمود منصف از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow$

۶

$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_1 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2$



۷. الف) ضلع‌های روبه‌رو (ب) موازی

۸

$\widehat{D} = \widehat{A} = 90^\circ$ پس دایره مماس هستند
 شعاع‌های دایره هستند. $\overline{OD} = \overline{OA}$
 متقابل برآسند $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

اجزای متناظر $\rightarrow \triangle ABO \cong \triangle CDO$

۹

چون مثلث متساوی‌الساقین است. $\overline{AB} = \overline{AC}$
 ضلع مشترک هر دو مثلث $\overline{AM} = \overline{AM}$
 چون AM میانه وارد بر BC است. $\overline{BM} = \overline{MC}$

اجزای متناظر $\rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC$

۱۰

فرض مسئله $\overline{AE} = \overline{FC}$
 $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$
 اضلاع روبروی مستطیل $\overline{AD} = \overline{BC}$

اجزای متناظر $\rightarrow \triangle AED \cong \triangle BFC$

اجزای متناظر $\rightarrow \overline{DE} = \overline{BF}$

۱۱

$\widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ$
 $\overline{AO} = \overline{OB}$ چون d از وسط AB گذشته است.
 متقابل برآسند $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

اجزای متناظر $\rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH'$

اجزای متناظر $\rightarrow \overline{OH} = \overline{OH}'$

۱۲

$\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$
 شعاع‌های دایره بزرگ هستند. $\overline{OB} = \overline{OD}$
 شعاع‌های دایره کوچک هستند. $\overline{OA} = \overline{OC}$

اجزای متناظر $\rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل چهارم

الف) $\left. \begin{aligned} 3^{-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ 3^{-2} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{9}$

ب) $\left. \begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^{-3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 > \frac{1}{8}$

الف) $125 \times 5^{-7} = 5^3 \times 5^{-7} = 5^{-4}$

ب) $\frac{15^{-6}}{15^{-3}} = 15^{-6-(-3)} = 15^{-3}$

پ) $\frac{a^4 \cdot b^{-6} \cdot z^{-1}}{a^{-3} \cdot b^{-13} \cdot z^{-8}} = \frac{a^4}{a^{-3}} \cdot \frac{b^{-6}}{b^{-13}} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-8}} = a^7 \cdot b^7 \cdot z^7 = (abz)^7$

۳) $2^{-3} + 2^{-2} - (-2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \times (1/5)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \times (1/5)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$

چون پایه‌ها مساوی هستند پس حتماً توان‌ها هم مساوی هستند
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8} \rightarrow -x-3 = -8 \rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$

۵) الف) $\frac{2^5 \times 3^{-11}}{2^{-11} \times 3^5} = \frac{2^5}{2^{-11}} \times \frac{3^{11}}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

ب) $(\sqrt{12})^{14} \times (\sqrt{3})^{14} \times 6^{-9} = (\sqrt{36})^{14} \times 6^{-9} = 6^{14} \times 6^{-9} = 6^5$

۶) $6^{14} \times 6^{-9} = 6^5$

پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times (7^2)^5 = 3^{10} \times 7^{10} = 21^{10}$

۶) الف) $100000000 = 1/000000000 \times 10^9 = 1 \times 10^9$

ب) 9×10^5 پ) $1/78 \times 10^6$

ت) $3/996258 \times 10^6$ ث) $5/9328225 \times 10^3$ ج) $2/05 \times 10^1$

۷) الف) $0/000000001 = 1 \times 10^{-9} = 1 \times 10^{-9}$

ب) 5×10^{-6}

پ) $4/206 \times 10^{-5}$

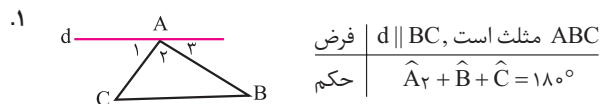
ت) $7/9653 \times 10^{-1}$

۸) $9/17 \times 10^7$

۹) $\frac{1/4 \times 10^9}{1/3 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^9}{13 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^2}{13} = \frac{14}{13} \times 10^2 = 1/076 \times 10^2$

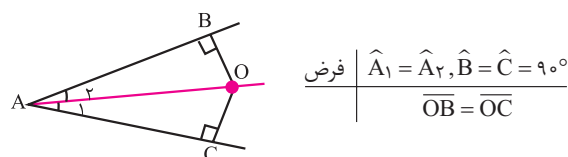
۱۰) الف) $\frac{53253 \times 10^{-7}}{5/35253 \times 10^5} = \frac{53253 \times 10^{-7}}{53253 \times 10^5} = 10^{-12}$

۱۸. برای اثبات این موضوع ابتدا یک مثلث رسم کرده و سپس خط d را به موازات BC از نقطه A رسم می‌کنیم.



$d \parallel BC, AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$
 $d \parallel BC, AB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$
 $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ با توجه به رسم خط d داریم

۲. $\hat{C} + \hat{A}_2 + \hat{B} = 180^\circ$



$\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$
 $\overline{OA} = \overline{OA} = \text{ضلع مشترک}$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است نیمساز است \rightarrow وز

۴. $\triangle OAB \cong \triangle OAC$ اجزای متناظر $\rightarrow \overline{OB} = \overline{OC}$

توجه داشته باشید که $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ به این دلیل است که سؤال در مورد فاصله نقطه O از خط AB و AC صحبت کرده که همیشه فاصله نقطه از خط طول خط عمود است که از نقطه بر خط رسم می‌شود.

۲۰. الف) درست

ب) نادرست؛ زیرا نسبت اضلاع متناظر ممکن است با هم برابر نباشند.

پ) نادرست؛ زیرا زاویه‌های متناظر ممکن است با هم برابر نباشند.

ت) درست

۲۱. خیر؛ زیرا نسبت اضلاع متناظر برابر نیست:
 $\frac{\overline{AB}}{\overline{GF}} \neq \frac{\overline{AD}}{\overline{GH}}$

$\frac{5}{6} \neq \frac{1}{2}$

۲۲.

$\frac{3}{2} = \frac{24}{x} \rightarrow x = \frac{24 \times 2}{3} = 16$

۲۳. نقشه $\frac{1}{400}$ واقعی $\frac{5}{4} \rightarrow x = 5/4 \times 400 = 216 \text{ cm}$

۲۴. چون دو مثلث متشابه هستند پس نسبت اضلاع متناظر برابر است.

$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{10} = \frac{8}{x+7}$

۹. نسبت تشابه: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ پس برای به دست آوردن x، اگر یکی از تناسب‌های زیر را بنویسید کافایت:

$\frac{4}{x-1} = \frac{1}{2} \rightarrow x-1 = \frac{4 \times 2}{1} = 8 \rightarrow x = 9$

$\frac{8}{x+7} = \frac{1}{2} \rightarrow x+7 = \frac{8 \times 2}{1} = 16 \rightarrow x = 9$

$$10^4 \times \frac{2}{5} \times 10^{-3} \times \frac{8}{9} \times 10^{-3}$$

ضرب

$$1/178 \times 10^{-3} \times 10^4 = 1/178 \times 10^1$$

۱۱. الف) ۴۹۸۶۰۰ ب) ۰/۰۰۰۳۰۲۶

۱۲. الف) نادرست ب) نادرست
 ب) درست ت) درست
 ج) درست ث) نادرست

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = -x - (-y) = -x + y = y - x$$

۱۳. c : الف) a : ب) b : پ) d : ت)

۱۴. راه حل اول: $\sqrt{200} = \sqrt{5^2 \times 2^3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2^3} =$

$$5 \times \sqrt{2^2 \times 2} = 5 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$$

$$= 5 \times 2 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

راه حل دوم:

۱۵. الف) $\sqrt{50} + \sqrt{8} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^3} =$

$$\sqrt{5^2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

ب) $\sqrt{27} + 2\sqrt{3} = \sqrt{3^3} + 2\sqrt{3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

۱۶. الف) $2\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3 \times 9} - \sqrt{3 \times 4} + \sqrt{25 \times 3}$

$$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

ب) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

۱۷. الف) $\sqrt{54} + \sqrt{16} = \sqrt{3^3 \times 2} + \sqrt{2^4} =$

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

ب) $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

۱۸. الف) $7\sqrt{12} - \sqrt{75} = 7\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} = 14\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

ب) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل پنجم

۱. $4x(x^2 - x + 3) + 4x^2 - 12$

$$4x^3 - 4x^2 + 12x + 4x^2 - 12$$

$$4x^3 + 12x - 12$$

سه جمله:

۲. $(2-2x)(x^2-2x+1) =$

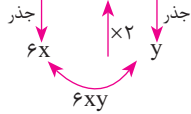
$$2x^2 - 6x + 2 - 2x^2 + 6x^2 - 2x = -2x^2 + 8x^2 - 8x + 2$$

۳. الف) ۵ ب) ۶ پ) ۰

۴. الف) $(2a-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

ب) $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

۵. الف) $36x^2 - 12xy + y^2 = (6x-y)^2$



ب) $lab - 6a = 2 \times 2 \times 2 (a)b - 2 \times 3 (a) = 2a \left(\frac{lab}{2a} - \frac{6a}{2a} \right) = 2a(3b-3)$

۶. $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

۷. الف) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 20xz - 30yz$

ب) $(5x)^2 + (1+3)5x + (1)(3) = 25x^2 + 20x + 3$

پ) $(100+5)(100-5) = 100^2 - 5^2 = 10000 - 25 = 9975$

۸. الف) $(x+2)(x+3)$

ب) $(2a-3)(2a+3)$

پ) $(x-5)(x+2)$

۹. $(3-4a)(3+4a) = 9 - 16a^2$

۱۰. الف) $(x+2-3y)(x+2+3y) = (x+2)^2 - (3y)^2 = x^2 + 4x + 4 - 9y^2$

ب) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

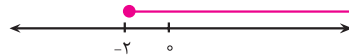
۱۱. $3x \leq 7x + 8$

$$3x - 7x \leq 8$$

$$-4x \leq 8$$

$$x \geq \frac{8}{-4}$$

$$x \geq -2$$



۱۲. $2(x-3) - 1 \leq 3x$

$$2x - 6 - 1 \leq 3x$$

$$2x - 3x \leq 7 - 6$$

$$-x \leq 1$$

$$x \geq \frac{1}{-1}$$

$$x \geq -1$$

۱۳. $11 - 2x \geq 4(-x+1) - 3$

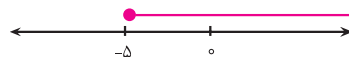
$$11 - 2x \geq -4x + 4 - 3$$

$$-2x + 4x \geq 4 - 3 - 11$$

$$2x \geq -10$$

$$x \geq \frac{-10}{2}$$

$$x \geq -5$$



$$y = 2x + 5 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}} 5 = 2(-2) + 5$$

$$5 = -4 + 5$$

$$5 = 1$$

چون $5 = 1$ یک تساوی غلط است پس نتیجه می‌گیریم نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 2x + 5$ قرار ندارد.

$$y = ax - 9 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}} -2 = a(2) - 9$$

$$-2 = 2a - 9$$

$$-2 + 9 = 2a$$

$$7 = 2a \rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{4}{9}x + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 18 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = \frac{4}{9} \times 18 + b$$

$$4 = 8 + b$$

$$4 - 8 = b$$

$$\boxed{-4 = b}$$

$$A: y = -2x + 6 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \dots \\ 0 \end{bmatrix}} 0 = -2x + 6$$

$$\Rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B: y = -2x + 6 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ \dots \end{bmatrix}} y = -2(4) + 6$$

$$\Rightarrow y = -8 + 6 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

9. وقتی خطی محور طول‌ها را قطع می‌کند پس در نقطه تقاطع عرض نقطه صفر است. ($y = 0$)

$$y = x - 4 \xrightarrow{y=0} 0 = x - 4 \Rightarrow x = +4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10. وقتی خطی محور عرض‌ها را قطع می‌کند پس در نقطه تقاطع طول نقطه صفر است. ($x = 0$)

$$y = \Delta x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=0} y = \Delta(0) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

11. چون خط مورد نظر باید با خط $y = x + 2$ موازی باشد پس شیب آن با شیب خط $y = x + 2$ باید برابر باشند. شیب این خط یعنی ضریب x برابر با 1 است پس شیب خط مورد نظر 1 است. ($a = 1$) اما چون عرض از مبدأ را نداریم باید به طریق زیر و با استفاده از نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ به دست آوریم:

$$y = ax + b \xrightarrow{\begin{matrix} x=5 \\ y=0 \\ a=1 \end{matrix}} 0 = 1 \times 5 + b \Rightarrow 0 = 5 + b \Rightarrow b = -5$$

بنابراین معادله خط به صورت مقابل است: $y = ax + b \xrightarrow{\begin{matrix} a=1 \\ b=-5 \end{matrix}} y = x - 5$

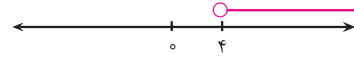
5. $\frac{y-1}{8} > \frac{y-4}{16}$

$$16 \times \frac{y-1}{8} - 16 \times \frac{1}{2} > 16 \times \frac{y-4}{16}$$

$$2y - 8 > y - 4$$

$$2y - y > -4 + 8$$

$$y > 4$$



14. الف) نابرابری $a.b > 0$ نشان می‌دهد که حاصل ضرب دو عدد حقیقی، بزرگتر از صفر است یعنی مثبت است پس حتماً هر دو عدد هم علامت هستند یا هر دو منفی یا هر دو مثبت هستند.

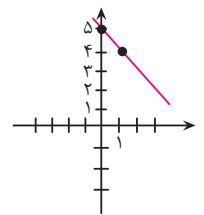
ب) $\frac{1}{2}a + 4b \leq 6$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل هشتم

الف)

x	0	1
y	5	4

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
--	--	--

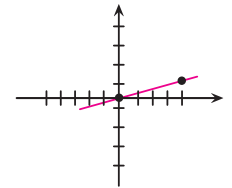


توجه داشته باشید که برای رسم هر خط داشتن حداقل 2 نقطه لازم و کافی است.

ب)

x	0	4
y	0	1

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
--	--	--



2. $y = \frac{3}{8}x - 1 \xrightarrow{x=4} y = \frac{3}{8} \times 4 - 1$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} - 1 = +\frac{1}{2} \rightarrow y = +\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

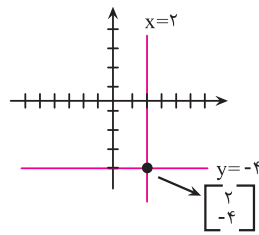
3. $y = 0 / \Delta x \xrightarrow{y=-1/5} -1/5 = 0 / \Delta x \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1/5 \end{bmatrix}$

4. محل برخورد خط $y = -3x - 6$ با محور طول‌ها نقطه‌ای است که عرض آن صفر است. ($y = 0$)

$$-3x - 6 = 0 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{-3} \Rightarrow x = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

محل برخورد خط $y = -3x - 6$ با محور عرض‌ها نقطه‌ای است که طول آن صفر است. ($x = 0$)

$$y = -3(0) - 6 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$



$$2y - 8x = 10 \Rightarrow$$

$$2y = 8x + 10 \Rightarrow y = 4x + 5 \Rightarrow \text{شیب} = 4$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\substack{a=f \\ b=0}} y = 4x$$

۱۴. خط d از نقاط $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور کرده است:

$$\text{شیب خط} = \frac{0 - (-1)}{-3 - 0} = \frac{1}{-3}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\substack{a=-\frac{1}{3} \\ x=0 \\ y=-1}} -1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 0 + b \Rightarrow b = -1$$

$$y = ax + b \xrightarrow{\substack{a=-\frac{1}{3} \\ b=-1}} y = -\frac{1}{3}x - 1$$

۱۵. خط L از نقاط مختلفی گذشته است که دو نقطه را مشخص می‌کنیم مثلاً

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ بنابراین شیب خط را به دست می‌آوریم: } \frac{3-1}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

اما از روش دیگری نیز می‌توانیم شیب این خط را به دست آوریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{HB}{HA} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۶. چون دو خط موازی محورها هستند پس بر هم عمودند پس زاویه بین آنها برابر با 90° می‌باشد.

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 6y = -8 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y = -8 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$x - 3y = 4 \xrightarrow{y=-1} x - 3(-1) = 4 \Rightarrow x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ 3x - y = -2 \end{cases} \xrightarrow{x=2-y} 3(2-y) - y = -2$$

$$\Rightarrow 6 - 3y - y = -2 \Rightarrow 6 - 4y = -2 \Rightarrow -4y = -8 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2 - y \xrightarrow{y=2} x = 2 - 2 \Rightarrow x = 0$$

x = تعداد اتومبیل‌ها

y = تعداد دوچرخه‌ها

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$-2 \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$2x = 10 \rightarrow x = 5$$

$$x + y = 20 \xrightarrow{x=5} 5 + y = 20 \rightarrow y = 15$$

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{y+3}{3} = \frac{1}{6} \\ 2x - 8y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{y+3}{3} = \frac{1}{6} \\ 2x - 8y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \times \frac{x-5}{2} + 6 \times \frac{y+3}{3} = 6 \times \frac{1}{6} \\ 2x - 8y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 15 + 2y + 6 = 1 \\ 2x - 8y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - 8y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ -2(2x - 8y) = -2(-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 20 \\ -6x + 24y = +6 \end{cases}$$

$$28y = 26$$

$$y = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}$$

$$2x - 8y = -2 \xrightarrow{y=\frac{13}{14}} 2x - 8 \times \frac{13}{14} = -2$$

$$\rightarrow 2x - \frac{52}{7} = -2 \rightarrow 2x = -2 + \frac{52}{7} = \frac{38}{7}$$

$$x = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}$$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل هفتم

۱. خیر؛ زیرا عبارتی که داخل قدر مطلق هستند چند جمله‌ای نیستند پس عبارت گویا به حساب نمی‌آیند.

۲. توجه: برای پاسخ به این سؤال نباید کسرها را ساده کنیم چون در این صورت یکی از عوامل صفر کننده مخرج از بین می‌رود.

الف) $x = 0$
ب) $x = 0$

ج) $2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

د) $x^2 + 5x + 6 = 0$

ه) $(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$

ت) به ازای همه مقادیر x تعریف شده است. زیرا به ازای هیچ مقداری مخرج این کسر صفر نمی‌شود.

$$\frac{4x^2 - 16}{4x^2 - 20x - 56} = \frac{\cancel{4}(x^2 - 4)}{\cancel{4}(x^2 - 5x - 14)}$$

$$= \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-7)} = \frac{x-2}{x-7}$$

$$\frac{6x^2yz - xy^2}{-3x^2y} = \frac{6x^2yz}{-3x^2y} - \frac{xy^2}{-3x^2y} =$$

$$-2xz + \frac{y}{3x} = -2xz + \frac{y}{3x}$$

$$x^2 + 2x^2 - 8x \quad \left| \begin{array}{l} x-2 \\ x^2+4x \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x^2 \\ \oplus \oplus \\ \hline 4x^2 - 8x \\ 4x^2 - 8x \\ \oplus \oplus \\ \hline 0 \end{array}$$

پاسخنامه تشریحی تمرین‌های فصل هشتم

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = 4^4$

مساحت کره $S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 4^2 = 3 \times 64 = 192$

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 14 \times 30^3 = \frac{4 \times \pi \times 14 \times 27000}{3}$

$$= 4 \times 3140 \times 9$$

حجم نیمکره $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3140 \times 9 = 18 \times 3140 = 56520$

کره $S = 4\pi R^2 \Rightarrow$ نیم کره $S = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi R^2$

$= 2 \times \pi \times 1^2 = 6$ مساحت رویه نیم کره می باشد:
چون نیم کره چوبی توپر یک سطح دایره‌ای هم در قاعده دارد پس باید مساحت آن را هم برای مساحت نیم کره حساب کنیم:

دایره $S = 1 \times 1 \times \pi = \pi$

نیم کره چوبی توپر $S = 6 + \pi = 9$

قطر کره = قطر قاعده استوانه

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = 4000$

حجم استوانه $V =$ ارتفاع \times مساحت قاعده $= 10 \times 10 \times \pi \times 20 = 6000$

حجم فضای بین کره و استوانه $= 6000 - 4000 = 2000$

شعاع تقریبی کره زمین $= 10000 \div 2 = 5000$

$S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 5000^2 = 300000000 = 3 \times 10^8$

$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times \pi \times 6 = 200$

$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 2 \times 2 \times \pi \times 14 \times 15 = 62/8$

۹.

$$\frac{4x}{x-5} = \frac{4x^2}{x^2(x-5)}$$

۱۰.

الف) $\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \times \frac{6x^2 + 18x}{x^2 + x - 6} =$

$$= \frac{(x-2)^2}{\cancel{4}xy(x-2)} \times \frac{\cancel{6}x(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$\frac{1}{2y} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{y}$

۱.

ب) $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2(x+1) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$

$\frac{2x+2+2x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$

۲.

پ) $\frac{x^2 + 2x + 1}{3-x} \times \frac{x-2}{x+1} =$

$\frac{(x+1)^2}{3-x} \times \frac{-(3-x)}{x+1} = \frac{x+1}{1} \times \frac{-1}{1} = -(x+1)$

۳.

ت) $\frac{7}{2x} + \frac{5x-3}{2x} - \frac{1}{x} =$

$\frac{7+5x-3-2}{2x} = \frac{5x+2}{2x}$

ث) $\frac{2}{1} - \frac{2a}{a-b} = \frac{2a-2b-2a}{a-b} = \frac{-2b}{a-b}$

$\frac{C-A^2}{B^2} = \frac{2x^2 - (2x+5)^2}{(1-2x)^2} =$

$\frac{2x^2 - (4x^2 + 20x + 25)}{(1-2x)^2} = \frac{2x^2 - 4x^2 - 20x - 25}{(1-2x)^2}$

$= \frac{-2x^2 - 20x - 25}{(1-2x)^2}$

$\frac{-28x^2y^2z^2}{7x^3yz^2} = -4xy$

۵.

$2x^2 - 7x - 15 \quad \left| \begin{array}{l} x-5 \\ 2x+3 \end{array} \right.$

$2x^2 - 10x$

$\oplus \oplus$

$2x - 15$

$2x - 15$

$\oplus \oplus$

0

۶.

۷.

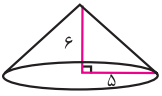
۴.

۵.

۶.

۷.

۸.



$$V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

۱۱.

$$\frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 3 \times 4 = 150$$

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 + 9 = 25$$

$$h^2 = 25 - 9 = 16$$

$$h = \sqrt{16}$$

$$\text{مساحت یک مثلث} = \frac{5 \times \sqrt{16}}{2} = 3\sqrt{16}$$

$$\text{مساحت کل گسترده} = 4 \times 3\sqrt{16} = 12\sqrt{16} = 12\sqrt{9 \times 2} = 36\sqrt{2}$$

$$y = 3$$

$$x = 10$$

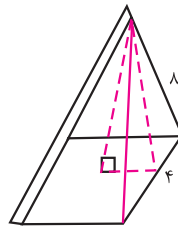
$$V = sh = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi \cdot a = \frac{1}{4} \pi a^3$$

۱۲.

مساحت جانبی استوانه + مساحت ۲ دایره = مساحت کل استوانه

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} + \text{مساحت جانبی استوانه} = \text{مساحت کل استوانه}$$

$$= 2 \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \pi + \pi a^2 = \frac{1}{2} \pi a^2 + \pi a^2 = \frac{3}{2} \pi a^2$$



۱۳.

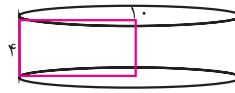
$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 56$$

$$h = \sqrt{56}$$

و حالا حجم هرم را حساب می‌کنیم: $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \sqrt{56} = \frac{16\sqrt{56}}{3}$

۹.

$$V = \frac{1}{3} Sh \Rightarrow \frac{1}{3} \times 30 \times h = 100 \Rightarrow 10 \times h = 100 \rightarrow h = 10$$



۱۰. الف) استوانه

ب) $V = Sh = 10 \times 10 \times 3 / 14 \times 4 = 1256$

یادداشت:

