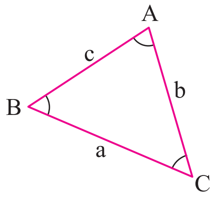
درس ۲ (قضیهٔ کسینوس‌ها)

قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها:

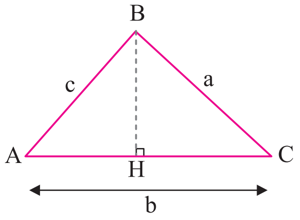


$$\begin{cases} a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \\ b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos B \\ c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos C \end{cases}$$

اثبات: با توجه به اندازه زاویه A دو حالت پیش می‌آید:

الف) زاویه A حاده باشد $(\widehat{A} < ۹۰^{\circ})$

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH:



$$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c\,.\cos A$$

$$CH = AC - AH \rightarrow CH = b - c\,.\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c.\sin A$$

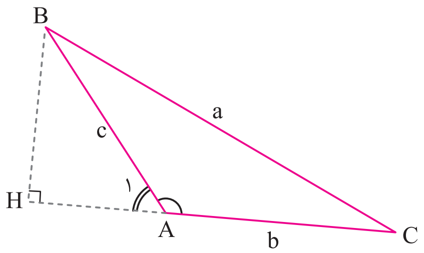
طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \rightarrow a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c\,.\cos A)^{۲} =$$

$$c^{۲}\sin^{۲}A + b^{۲} + c^{۲}\cos^{۲}A - ۲bc\cos A \rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}\underbrace{(\sin^{۲}A + \cos^{۲}A)}_{۱} - ۲bc\cos A \rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,.\cos A$$

ب) زاویه A منفرجه باشد $(\widehat{A} > ۹۰^{\circ})$

ارتفاع BH را بیرون مثلث رسم می‌کنیم. زاویه خارجی $\widehat{A}_۱$ و $\widehat{A}$ مکمل یکدیگرند:



$$\sin\widehat{A}_۱ = \sin\widehat{A} \quad , \quad \cos\widehat{A}_۱ = -\cos\widehat{A}$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویه داریم:

$$\cos A_۱ = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c\,.\cos A_۱ \rightarrow AH = -c\,.\cos A$$

$$CH = AC + AH = b - c\,.\cos A$$

$$\sin A_۱ = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c.\sin A_۱ \rightarrow BH = c\,.\sin A$$

طبق فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \rightarrow a^{۲} = (c\,.\sin A)^{۲} + (b - c\,.\cos A)^{۲} \rightarrow$$

$$a^{۲} = c^{۲}\sin^{۲}A + b^{۲} + c^{۲}\cos^{۲}A - ۲bc\,.\cos A \rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}\underbrace{(\sin^{۲}A + \cos^{۲}A)}_{۱} - ۲bc\,.\cos A \rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,.\cos A$$

تذکر مهم

۱. به کمک این قضیه با داشتن دو ضلع و زاویه بین، ضلع سوم محاسبه می‌شود.

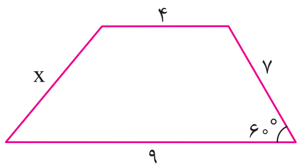
۲. به کمک این قضیه با داشتن سه ضلع، زاویه بین دو ضلع قابل محاسبه است.

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,.\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۲bc}$$

۳. اگر زاویه A قائمه باشد، این قضیه تبدیل به قضیه فیثاغورس می‌شود:

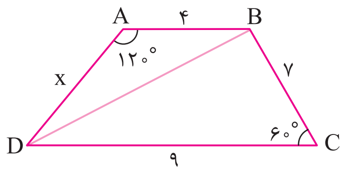
$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,.\cos A \xrightarrow{\cos ۹۰^{\circ} = ۰} a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

مثال ۵ *چهارضلعی مقابل، قابل محاط شدن در یک دایره است $(x+۲)$ کدام است؟* *(کنکور ریاضی ۹۹)*



۱) $\sqrt{۵۱}$ ۲) $\sqrt{۵۵}$ ۳) $\sqrt{۵۷}$ ۴) $\sqrt{۵۹}$

پاسخ: در چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکملند. بنابراین $\widehat{A} = ۱۲۰^{\circ}$



قضیه‌کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{BCD}$: $BD^{۲} = ۷^{۲} + ۹^{۲} - ۲(۷)(۹)\cos ۶۰^{\circ} = ۴۹ + ۸۱ - ۱۲۶(\frac{۱}{۲}) = ۶۷ \rightarrow BD = \sqrt{۶۷}$

قضیه‌کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{ABD}$: $\sqrt{۶۷}^{۲} = x^{۲} + ۴^{۲} - ۲(x)(۴)\cos ۱۲۰^{\circ} \rightarrow ۶۷ = x^{۲} + ۱۶ - ۸x(\frac{-۱}{۲})$

$$\rightarrow x^{۲} + ۴x - ۵۱ = ۰ \rightarrow \Delta = ۴^{۲} - ۴(۱)(-۵۱) = ۱۶ + ۲۰۴ = ۲۲۰$$

$$x = \frac{-۴ \pm \sqrt{۲۲۰}}{۲(۱)} \rightarrow x = \frac{-۴ + ۲\sqrt{۵۵}}{۲} = -۲ + \sqrt{۵۵} \rightarrow x + ۲ = \sqrt{۵۵}$$

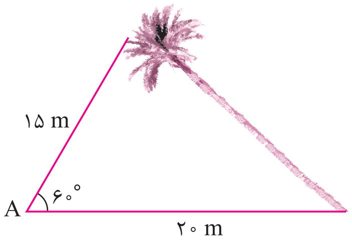
گزینهٔ «۲» درست است.

مثال ۶ *یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:*

الف) طول درخت.

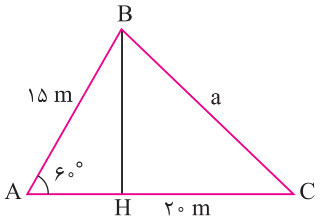
ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین.



پاسخ: الف)طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC:

$$a^2=15^2+20^2-2(15)(20)\cos 60^\circ=225+400-300\to a^2=325\to a=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$$



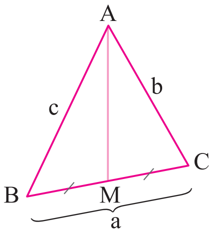
ب) طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC :

$$\frac{5\sqrt{13}}{\sin 60}=\frac{15}{\sin C}\to \sin C=\frac{15\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\to \sin C\simeq 0/72$$

پ) $\sin 60^\circ=\frac{BH}{AB}\to\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{15}\to BH=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

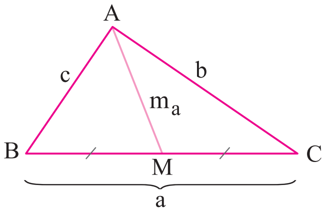
قضیه میانه‌ها: اگر a و b و c اضلاع و AM میانه مثلث باشد: $b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}$

(اثبات را در تمرین ۱۹ ملاحظه نمایید)



مثال ۷ *با استفاده از قضیه میانه‌ها نشان دهید اگر در مثلث ABC، زاویه A منفرجه باشد، آن‌گاه میانهٔ رأس A از نصف ضلع مقابل به آن، کوچک‌تر است.*

پاسخ: با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$90^\circ<A<180^\circ\Rightarrow\cos A<0\Rightarrow 0<-2bc\cos A\Rightarrow$$

$$b^2+c^2<b^2+c^2-bc\cos A\Rightarrow b^2+c^2<a^2\Rightarrow 2b^2+2c^2<2a^2\Rightarrow 2b^2+2c^2-a^2<a^2\Rightarrow\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}<a\Rightarrow\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}<\frac{a}{2}\Rightarrow m_a<\frac{a}{2}$$

نکته

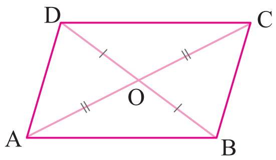
با توجه به مثال قبل؛ در هر مثلث دلخواه مانند ABC داریم:

- اگر $\hat{A}>90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2+c^2<a^2$ و در نتیجه $m_a<\frac{a}{2}$ و برعکس.
- اگر $\hat{A}=90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2+c^2=a^2$ و در نتیجه $m_a=\frac{a}{2}$ و برعکس.
- اگر $\hat{A}<90^\circ$ باشد، آن‌گاه $b^2+c^2>a^2$ و در نتیجه $m_a>\frac{a}{2}$ و برعکس.

مثال ۸ *ثابت کنید: مجموع مربعات اضلاع هر متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مربعات قطرهای آن.*

پاسخ: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس بنا به قضیه میانه‌ها در مثلث ABD داریم:

$$AB^2+AD^2=2OA^2+\frac{BD^2}{2}\Rightarrow AB^2+AD^2=2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{BD^2}{2}\Rightarrow 2AB^2+2AD^2=AC^2+BD^2$$



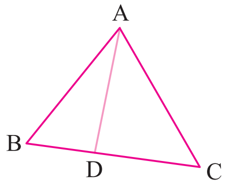
اما در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند: AD = BC و AB = CD، پس می‌توان نوشت:

$$AB^2+AB^2+AD^2+AD^2=AC^2+BD^2\Rightarrow AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$$

قضیه استوارت: در مثلث ABC، اگر D نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد، آنگاه داریم:

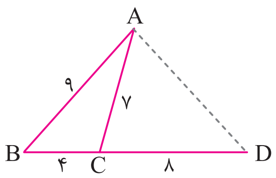
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

(اثبات را در تمرین ۲۰ ملاحظه نمایید)



مثال ۹ *در شکل روبه‌رو، اندازه پاره‌خط AD کدام است؟* *(کنکور ریاضی ۹۹)*

۱) ۹ ۲) $3\sqrt{10}$ ۳) ۱۰ ۴) $6\sqrt{3}$



پاسخ: طبق قضیه استوارت در مثلث ABD داریم:

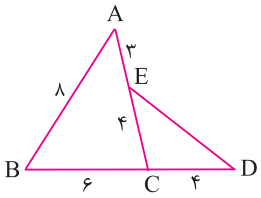
$$AB^2 \cdot CD + AD^2 \cdot CB = AC^2 \cdot BD + BC \cdot CD \cdot BD \to (9)^2(8) + (AD^2)(4) = (7)^2(12) + (4)(8)(12) \to 648 + 4AD^2 = 588 + 384 \to$$

$$4AD^2 = 324 \to AD^2 = 81 \to AD = 9$$

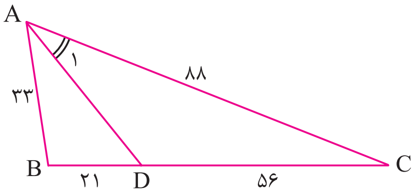
گزینهٔ «۱» درست است.

۳ سؤالات امتحانی درس دوم

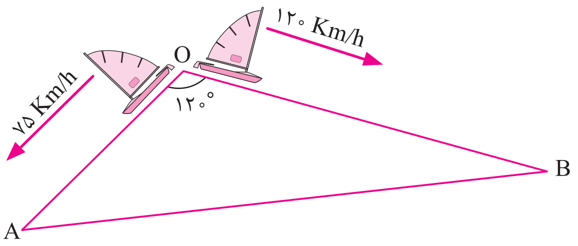
۱۱. در شکل مقابل طول DE را به دست آورید. *(نمونه دولتی ـ فرداد ۹۹)*



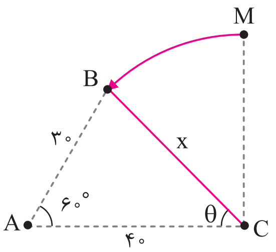
۱۲. در شکل روبه‌رو اندازه زاویه A_1 چند درجه است؟



۱۳. دو قایق از نقطه‌ای در یک دریاچه با سرعت‌های ۷۵ و ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت و با زاویه ۱۲۰ درجه از هم دور می‌شوند. ۴۰ دقیقه بعد در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟ *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*



۱۴. مطابق شکل در اثر وزش طوفان، تیر چراغ برقی منحرف شده است و در وضعیت زیر قرار گرفته است. نوک تیر چراغ برق از نقطهٔ A به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود و فاصلهٔ نقطهٔ A از نوک تیر ۳۰ متر می‌باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا پای تیر ۴۰ متر باشد، طول تیر چراغ برق و سینوس زاویهٔ انحراف آن از راستای افقی را حساب کنید. *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*

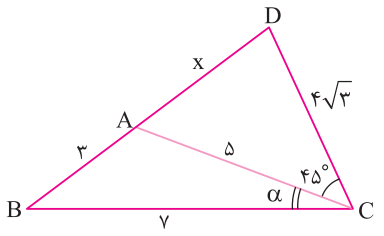


۱۵. در مثلث ABC داریم: $A=۳۰^\circ$ ، $c=۲$ و $b=۱+\sqrt{۳}$ ، زاویه B و طول ضلع سوم را بیابید. *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۰)*

۱۶. در شکل مقابل:

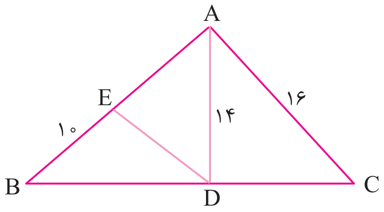
الف) مقدار x را بیابید.

ب) کسینوس زاویه α را حساب کنید. *(سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*



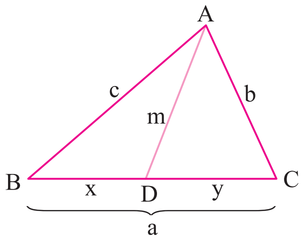
۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۶ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۱۴ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد $(DB > DC)$ نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۱۰ واحد از B قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟

اندازه زاویهٔ DEA چند درجه است؟



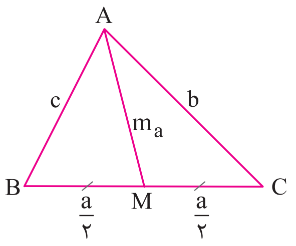
۱۸. نقطهٔ D را به دلخواه روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر گرفته‌ایم. نشان دهید بین پاره‌خط‌های روی شکل، رابطه روبه‌رو برقرار است: *(سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰)*

$$xb^۲+yc^۲=a(xy+m^۲)$$



۱۹. نشان دهید: طول هر میانهٔ مثلث برحسب اندازه‌های اضلاع آن، از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند: *(نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۱) (پرتکرار)*

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^۲+۲c^۲-a^۲}\qquad m_b=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^۲+۲c^۲-b^۲}\qquad m_c=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^۲+۲b^۲-c^۲}$$



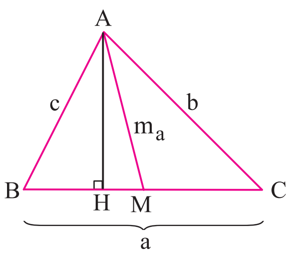
۲۰. در مثلث ABC ، نقطهٔ دلخواه D روی ضلع BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید: *(سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰)*

$$AB^۲ \,.\, DC+AC^۲ \,.\, DB=BC \,.\, (AD^۲+BD \,.\, DC)$$

۲۱. در مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را به دست آورید. *(سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰) (پرتکرار)*

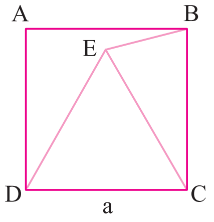
۲۲. در هر مثلث ABC ، با فرض $AC > AB$ با رسم میانه AM و ارتفاع AH مطابق شکل، ثابت کنید:

$$b^۲-c^۲=۲a\times MH$$

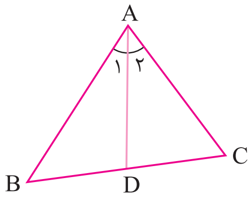


۲۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{B}+\widehat{C}=۹۰^\circ)$ ، نشان دهید؛ بین اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر و اندازهٔ دو ضلع دیگر آن رابطه زیر برقرار است: *(سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰)*

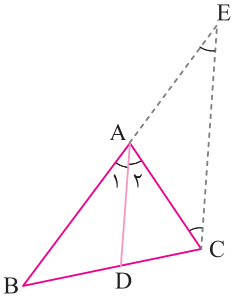
$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

.۲۴	نشان دهید در مثلث دلخواه ABC بین اندازهٔ میانه‌ها و اندازه اضلاع، رابطهٔ $m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲ = \frac{۳}{۴}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ برقرار است.(سمپاد ـ فرداد۹۹)
.۲۵	نقطه‌ای در صفحهٔ یک مستطیل در نظر می‌گیریم، نشان دهید: مجموع مربعات فواصل آن نقطه از دو رأس مقابل مستطیل با مجموع مربعات فواصلش از دو رأس دیگر مستطیل برابر است. (سمپاد ـ فرداد ۱۴۰۰)
.۲۶	در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربع و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع می‌باشد. طول پاره‌خط BE برحسب اندازهٔ ضلع مربع را به دست آورید. 
.۲۷	در مثلث ABC، $AB = ۶$، $AC = ۵$ و $BC = ۴$ و نقطه D روی ضلع AB چنان قرار دارد که $AD = \frac{۳}{۲}$ و $BD = \frac{۹}{۲}$ است. طول پاره‌خط CD را محاسبه کنید. (نمونه دولتی ـ فرداد ۱۴۰۰)

درس ۳ (قضیهٔ نیسمازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها)



نیمساز زاویه: نیمساز پاره‌خطی است که زاویه را نصف می‌کند. $(\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲)$ بین قطعات ایجاد شده توسط نیمساز و اضلاع زاویه، تناسب وجود دارد.



قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند.

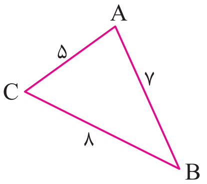
حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

اثبات: از رأس C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه E قطع کند:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{و مورب } AC)\ AD \parallel CE)\ \hat{A}_۲ = \hat{C} \\ (\text{و مورب } AE)\ AD \parallel CE)\ \hat{A}_۱ = \hat{E} \\ (\text{نیمساز})\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E} \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} AC = AE$$

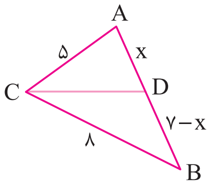
طبق قضیه تالس در مثلث BCE:

$$AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{AC = AE} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$



مثال ۱۰) *در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.*

پاسخ: طبق قضیه نیمسازها:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{x}{۷-x} \Rightarrow ۸x = ۳۵ - ۵x \Rightarrow ۱۳x = ۳۵ \Rightarrow x = \frac{۳۵}{۱۳} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{۳۵}{۱۳} \\ BD = ۷ - \frac{۳۵}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳} \end{cases}$$