# فصل اول: (هندسه تحلیلی و جبر)

## درس‌نامه

## درس ۱ (هندسه تحلیلی)

دوستان دانش‌پژوه؛ باید بدانید که مطالب این درس، جزو ابزارهای مورد نیاز در حل مسائل زیادی هستند. به عنوان نمونه، برای نوشتن معادلهٔ مماس بر منحنی در بحث مشتق در سال دوازدهم یا در فصل مقاطع مخروطی باز هم در سال دوازدهم به این مطالب نیاز خواهید داشت. پس حتماً روابط گفته شده را به خاطر بسپارید.

### یادآوری

#### انواع معادلات خط

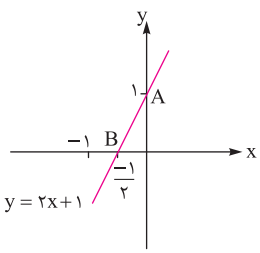
در جدول زیر، اطلاعات لازم را در مورد انواع معادله‌های خط که ممکن است در مسائل با آن‌ها روبرو باشیم، آورده‌ایم:

| | معادلهٔ خط | شیب خط | عرض از مبدأ خط | مثال | روش رسم خط |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱) | $y = ax + b$ | $m = a$ | $y = b$ | $y = ۲x + ۱$ | یافتن دو نقطهٔ دلخواه خط و اتصال آن‌ها به یکدیگر و امتدادشان |
| ۲) | $Ax + By + C = ۰$ | $m = -\frac{A}{B}$ | $y = -\frac{C}{B}$ | $x + y - ۱ = ۰$ | یافتن دو نقطهٔ دلخواه خط و اتصال آن‌ها به یکدیگر و امتدادشان |
| ۳) | $y = b$ | $m = ۰$ | $y = b$ | $y = ۲$ | خطی موازی با محور $x$ ها رسم می‌کنیم که در نقطه‌ای به عرض $b$ محور $y$ ها را قطع کند. |
| ۴) | $x = k$ | $m =$ تعریف نشده | - | $x = -۱$ | خطی موازی با محور $y$ ها رسم می‌کنیم که در نقطه‌ای به طول $k$ محور $x$ ها را قطع کند. |

**مثال ۱** *خطوط ارائه شده به عنوان مثال در جدول بالا را رسم کنید.*

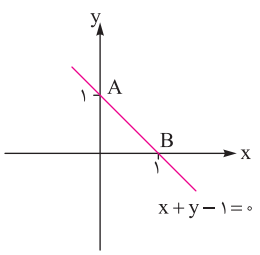
**پاسخ:** برای یافتن دو نقطهٔ دلخواه از خط، معمولاً بهتر است نقاط تقاطعِ خط با محورهای مختصات را انتخاب کنیم. به این طریق که یکبار به $x$ صفر داده، به کمک معادلهٔ خط، $y$ را می‌یابیم. بار دیگر به $y$ صفر داده، $x$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = ۲x + ۱ \xrightarrow{x = ۰} y = ۱ \to A(۰, ۱)$$
$$\xrightarrow{y = ۰} x = -\frac{۱}{۲} \to B(-\frac{۱}{۲}, ۰)$$

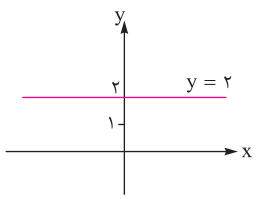



به طور مشابه، خط $x + y - ۱ = ۰$ را رسم می‌کنیم:

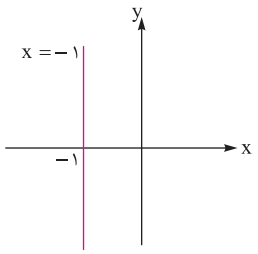
$$\begin{cases} x = ۰ \to y = ۱ \to A(۰, ۱) \\ y = ۰ \to x = ۱ \to B(۱, ۰) \end{cases}$$




خط $y = ۲$، خطی است افقی که از نقطه‌ای به عرض ۲ روی محور $y$ ها عبور می‌کند.



و در انتها خط $x=-1$، خطی است عمودی که از نقطه‌ای به طول ۱- روی محور x ها می‌گذرد.




## شیب خط و نکات آن

در جدول زیر، نکات مربوط به شیب را که باید بدانید. طبقه‌بندی کرده‌ایم:

| | اطلاعات داده شده در مسأله | روش یافتن شیب خط | مثال |
|---|---|---|---|
| ۱) | مختصات دو نقطهٔ A و B از خط معلوم است. | $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ | $A(1,2)\ ,\ B(2,4)\rightarrow m_{AB}=\frac{4-2}{2-1}=2$ |
| ۲) | زاویهٔ $\alpha$ که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد معلوم است. | $m=\tan\hat{\alpha}$ | $\hat{\alpha}=45^\circ\rightarrow m=\tan 45^\circ=1$ |
| ۳) | شیب یکی از دو خط موازی معلوم است. | $m=m'$ | $d: y=2x+1\rightarrow m_d=2\xrightarrow{d'\parallel d}m_{d'}=2$ |
| ۴) | شیب یکی از دو خط عمود بر هم معلوم است. | $m\times m'=-1$ یا $m'=\frac{-1}{m}$ | $d: y=\frac{x}{2}-3\rightarrow m_d=\frac{1}{2}\xrightarrow{d'\perp d}m_{d'}=-2$ |

**مثال ۲** خط L به معادلهٔ $2y-3x=1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+5$ را در نظر بگیرید. *(کار در کلاس صفحه ۴ ـ سؤال ۲)*

*الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.*

*ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟*

**پاسخ:** الف) باید شیب دو خط با هم برابر باشند. برای یافتن شیب خط L، هم می‌توانیم معادله خط را استاندارد کنیم ( y را تنها کنیم) و هم از فرمول گفته شده در جدول استفاده نماییم:

$$2y-3x=1\begin{cases}2y=3x+1\rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\rightarrow m_L=\frac{3}{2}\\ \text{یا}\\ m=-\frac{\text{ضریب x}}{\text{ضریب y}}\rightarrow m_L=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس شیب خط T نیز باید برابر با $\frac{3}{2}$ باشد $(m=\frac{3}{2})$

ب) برای آنکه خط‌های L و T بر هم عمود باشند، باید حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها ۱- باشد یا اینکه شیب T، عکس و قرینهٔ شیب خط L باشد:

$$m_L\times m_T=-1\rightarrow\frac{3}{2}\times m=-1\rightarrow m=-1\times\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\quad\text{یا}\quad m_T=\frac{-1}{m_L}\rightarrow m=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

## روش نوشتن معادلهٔ خط راست

برای آنکه بتوانیم معادلهٔ خط راست را بنویسیم، یا باید مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم یا اینکه مختصات یک نقطه از خط و شیب خط را به ما داده باشند. برای هر کدام از این دو حالت، روش نوشتن معادلهٔ خط را در الگوریتم‌های زیر مشاهده می‌کنیم:

* مختصات دو نقطهٔ A و B از خط d معلوم است.

(۱) شیب خط d را از رابطهٔ $m_d=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ پیدا می‌کنیم.

(۲) در رابطهٔ $y=ax+b$ به جای a، مقدار شیب را قرار می‌دهیم.

(۳) مختصات یکی از دو نقطهٔ A و B را در رابطه $y=ax+b$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار b پیدا شود.

(۴) معادلهٔ خط را می‌نویسیم.

* مختصات یک نقطهٔ A از خط d و شیب آن معلوم است.

(۱) در رابطهٔ $y = ax + b$ به جای a، مقدار شیب را می‌نویسیم.

(۲) مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ جای‌گذاری می‌کنیم تا b پیدا شود.

(۳) معادلهٔ خط را می‌نویسیم.

**مثال ۳** *مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که* $A(۵,۱)$ *و* $B(۱۰,۴)$ *دو رأس مجاور آن هستند.* *(کار در کلاس صفحه ۴ ـ سؤال ۳)*

*الف) شیب ضلع* AB *را بنویسید.*

*ب) شیب ضلع* AD *را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.*

*پ) اگر بدانیم نقطهٔ* $C(۷,۹)$ *رأس سوم مربع است، مختصات رأس* D *را بیابید.*

**پاسخ:** الف)

$$\text{شیب خط AB}: m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴-۱}{۱۰-۵} = \frac{۳}{۵}$$

ب) چون ضلع AD، باید بر ضلع AB در نقطهٔ A عمود باشد، پس شیب AD، باید عکس و قرینهٔ شیب AB باشد:

$$m_{AD} = \frac{-۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۵}} = -\frac{۵}{۳}$$

حال با داشتن شیب AD و نیز داشتن مختصات یک نقطهٔ A از آن، می‌توانیم معادله‌اش را بنویسیم:

معادلهٔ ضلع AD

$$y = ax + b \xrightarrow{a = -\frac{۵}{۳}} y = -\frac{۵}{۳}x + b \xrightarrow{A(۵,۱)} ۱ = -\frac{۵}{۳} \times ۵ + b \to b = \frac{۲۸}{۳} \to y = -\frac{۵}{۳}x + \frac{۲۸}{۳}$$

پ) ضلع CD مربع ABCD باید عمود بر ضلع AD باشد، پس شیب CD، عکس و قرینهٔ شیب AD می‌باشد (یا شیب CD موازی شیب AB است) داریم:

$$\text{شیب CD}: m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{y_D - ۹}{x_D - ۷} = \frac{۳}{۵}$$

$$۵y_D - ۴۵ = ۳x_D - ۲۱ \to ۵y_D = ۳x_D + ۲۴ \to y_D = \frac{۳}{۵}x_B + \frac{۲۴}{۵} \quad (*)$$

از طرفی نقطهٔ D روی ضلع AD است، پس مختصاتش در معادله ضلع AD صدق می‌کند:

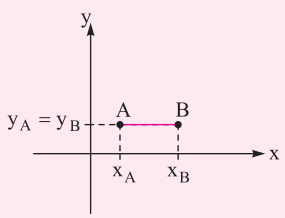
$$y = -\frac{۵}{۳}x + \frac{۲۸}{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{۳}{۵}x + \frac{۲۴}{۵} = -\frac{۵}{۳}x_D + \frac{۲۸}{۳} \to \frac{۳}{۵}x_D + \frac{۵}{۳}x_D = \frac{۲۸}{۳} - \frac{۲۴}{۵} \to \frac{۹+۲۵}{۱۵}x_D = \frac{۱۴۰-۷۲}{۱۵} \to \frac{۳۴}{۱۵}x_D = \frac{۶۸}{۱۵} \to x_D = ۲$$

$$y_D = \frac{۳}{۵}x_D + \frac{۲۴}{۵} \xrightarrow{x_D = ۲} y_D = \frac{۳}{۵} \times ۲ + \frac{۲۴}{۵} = ۶ \Rightarrow D(۲,۶)$$

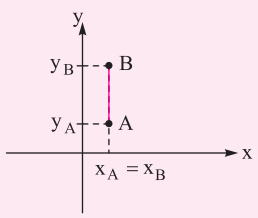
**تذکر** بعدها به کمک رابطهٔ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط، راه حل بسیار کوتاه‌تری برای حل قسمت (پ) این سؤال ارائه می‌نماییم)

**فاصلهٔ دو نقطه**

**۱.** اگر دو نقطهٔ A و B هم عرض باشند: $AB = |x_B - x_A|$

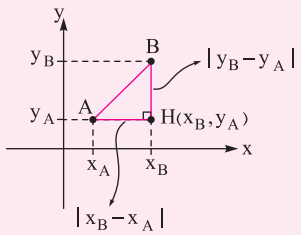



**۲.** اگر دو نقطهٔ A و B هم طول باشند: $AB = |y_B - y_A|$




**۳.** در حالت کلی وقتی A و B در یک راستای عمودی یا افقی نباشند:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$




توجه دارید که برای اثبات حالت کلی فاصلهٔ دو نقطه از یکدیگر، کافی است در مثلث $\overset{\Delta}{AHB}$ رابطهٔ فیثاغورس را بنویسیم.

**مثال ۴** *نقاط* $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ *را در نظر بگیرید و به دو روش نشان دهید* ABC *یک مثلث قائم‌الزاویه است.* *(کار در کلاس صفحهٔ ۶ ـ قسمتی از سؤال ۱)*

**پاسخ: روش اول:** طول ۳ ضلع مثلث را (به کمک فرمول فاصلهٔ دو نقطه) یافته، برقراری رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث نشان می‌دهیم:

$$AB=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}\ \rightarrow\ AB=۵ \qquad AC=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}\ \rightarrow\ AC=۵$$

$$BC=\sqrt{(-۲-۵)^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}\rightarrow BC=۵\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲ \xrightarrow{\text{زیرا}} ۵۰=۲۵+۲۵\rightarrow$$

پس مثلث ABC قائم‌الزاویه (و متساوی‌الساقین) است.

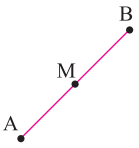
**روش دوم:** شیب اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم باید دو تا از ضلع‌ها بر هم عمود باشند:

$$\left.\begin{aligned} m_{AB}&=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳}\\ m_{AC}&=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=-\frac{۳}{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=-۱\Rightarrow$$

$AB\perp AC$ و مثلث ABC در رأس A، قائم‌الزاویه است.

## مختصات نقطهٔ وسط پاره خط

به سادگی می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصاتش با مختصات دو سر پاره‌خط AB دارای رابطه‌های مقابل هستند:




$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}\end{cases}$$

**مثال ۵** *در مثلث* $\overset{\Delta}{ABC}$، *با رئوس* $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$، *طول و معادلهٔ میانهٔ* AM *را بیابید.* *(کار در کلاس صفحه ۷ ـ قسمتی از سؤال ۱)*

**پاسخ:** از آنجا که میانهٔ AM باید از رأس A به وسط ضلع مقابلش (یعنی ضلع BC) وصل شود، ابتدا باید مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۳+۷}{۲}=۵\\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۱+۱۱}{۲}=۶\end{cases}\rightarrow M(۵,۶)$$

سپس برای آنکه طول میانهٔ AM را بیابیم، از فرمول فاصلهٔ دو نقطه استفاده می‌کنیم:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۶-۹)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵\ \Rightarrow \text{طول میانه } AM=۵$$

اما برای نوشتن معادلهٔ میانهٔ AM ابتدا باید شیب آن را بیابیم:

$$m_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{۶-۹}{۵-۱}=-\frac{۳}{۴}$$

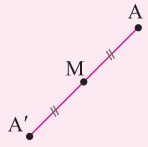
حال در معادلهٔ کلی خط راست $y=ax+b$، مختصات یکی از دو نقطهٔ A یا M را صدق می‌دهیم تا مقدار b هم پیدا شود:

معادلهٔ میانه AM $\rightarrow ۴y=-۳x+۳۹\rightarrow ۴y+۳x=۳۹$ یا $\xrightarrow{a=\frac{-۳}{۴}} y=-\frac{۳}{۴}x+b \xrightarrow{A(۱,۹)} ۹=-\frac{۳}{۴}+b\rightarrow b=۹+\frac{۳}{۴}=\frac{۳۹}{۴}\rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳۹}{۴}$

**نتایج مهم فرمول مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط**

**۱. یافتن قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطه‌ای دیگر:**

برای یافتن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M، باید از A به M وصل کرده به اندازهٔ خودش امتداد بدهیم تا به نقطهٔ A′ برسیم. پس M وسط پاره‌خط AA′ است و داریم:

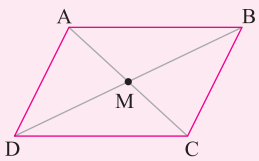



$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}\rightarrow x_A+x_{A'}=۲x_M\rightarrow \boxed{x_{A'}=۲x_M-x_A}\ (*)$$

$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\rightarrow y_A+y_{A'}=۲y_M\rightarrow \boxed{y_{A'}=۲y_M-y_A}$$

**۲. رابطهٔ مختصات دو سر قطرها در متوازی‌الاضلاع:**

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی نقطهٔ M وسط هر دو قطرِ AC و BD است. پس داریم:




$$\left.\begin{aligned} x_M&=\frac{x_A+x_C}{۲}\\ x_M&=\frac{x_B+x_D}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{x_A+x_C=x_B+x_D}$$

و به طور مشابه $\Rightarrow \boxed{y_A+y_C=y_B+y_D}$

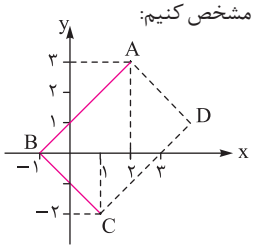
**مثال ۶** قرینهٔ نقطهٔ $C(1,2)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-1,4)$ به دست آورید. *(کار در کلاس صفحه ۷ ـ سؤال ۲)*

**پاسخ:** با توجه به روابط (*)، اگر $C'$ قرینهٔ نقطهٔ $C$ نسبت به نقطهٔ $M$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} x_{C'} = 2x_M - x_C \to x_{C'} = 2(-1) - 1 \to x_{C'} = -3 \\ y_{C'} = 2y_M - y_C \to y_{C'} = 2(4) - 2 \to y_{C'} = 6 \end{cases} \Rightarrow C'(-3,6)$$

**مثال ۷** نقاط $A(2,3)$، $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. *(تمرین صفحه ۹ ـ سؤال ۵)*

**پاسخ:** چون در صورت سؤال مشخص نشده که مختصات دو سر قطرها کدام‌اند باید نقاط داده شده را در محورهای مختصات مشخص کنیم:




پس $AC$ و $BD$ قطرهای مستطیل هستند و داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \to 2 + 1 = -1 + x_D \to x_D = 4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \to 3 + (-2) = 0 + y_D \to y_D = 1$$

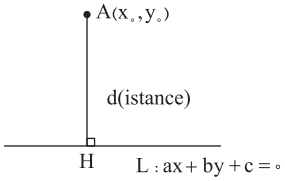
پس مختصات رأس چهارم مستطیل $D(4,1)$ می‌باشد.

راستی دوستان باهوش من، اکنون حتماً راه کوتاه‌تر قسمت (پ) مثال (۳) را خودتان حدس زده‌اید. بله درست است استفاده از رابطهٔ مختصات دو سر قطرها در متوازی‌الاضلاع. چون مربع هم جزو فرزندان متوازی‌الاضلاع است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \to 5 + 7 = 10 + x_D \to x_D = 2 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \to 1 + 9 = 4 + y_D \to y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(2,6)$$

## فاصلهٔ نقطه از خط

برای یافتن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $L$ به معادلهٔ $ax + by + c = 0$، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:




$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

به زبان ساده‌تر:

۱. در معادلهٔ خط $L$ تمام جملات را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم (طرف دیگر تساوی صفر باشد.)

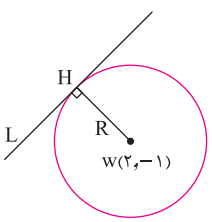
۲. یک خط کسری رسم می‌کنیم، در صورت کسر داخل قدرمطلق معادلهٔ خط $L$ را قرار می‌دهیم. سپس به جای $x$ و $y$، مختصات نقطهٔ $A$ (یعنی $x_0$ و $y_0$) را قرار می‌دهیم.

۳. در مخرج کسر و زیر رادیکال، مربع ضریب $x$ در معادلهٔ خط $L$ را با مربع ضریب $y$، جمع می‌کنیم.

**مثال ۸** خط $L : 3x - 4y = 0$، بر دایره‌ای به مرکز $w(2,-1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید. *(کار در کلاس صفحه ۹ ـ سؤال ۲)*

**پاسخ:** کار اول را خود سؤال انجام داده، یعنی تمام جملات معادلهٔ خط، یک طرف تساوی هستند. پس بروییم سراغ کارهای بعدی:

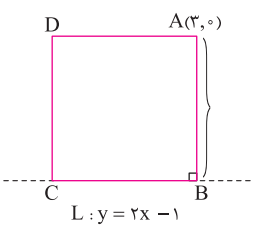
توجه دارید که خط $L$ مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس $H$، بر شعاع دایره عمود است. پس طول شعاع برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره (یعنی $w$) از خط مماس (یعنی $L$)




$$R = d = \frac{|3x - 4y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \overset{x=2,\ y=-1}{=\!=\!=} \frac{|6+4|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2 \to R = 2$$

**مثال ۹** یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید. *(تمرین صفحه ۹ ـ سؤال ۷)*

**پاسخ:** چون مختصات نقطهٔ $A$ در معادلهٔ خط $L$ صدق نمی‌کند، پس رأس $A$ روی خط $L$ قرار ندارد. بنابراین طول ضلع مربع، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط $L$ و داریم:




$$AB = d = \frac{|y - 2x + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2}} \overset{x=3,\ y=0}{=\!=\!=} \frac{|-6+1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

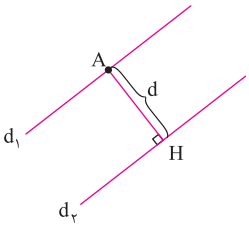
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{25}{5} = 5 \to \text{مساحت مربع} = 5$$

**نکته** فاصلهٔ دو خط موازی: برای یافتن فاصلهٔ دو خط موازی $d_1$ و $d_2$ از یکدیگر، کافی است نقطهٔ دلخواهی روی یکی از دو خط مشخص کنیم. سپس فاصلهٔ آن نقطه را از خط دیگر بیابیم.

**مثال ۱۰** *الف) نشان دهید دو خط با معادلات* $5x-12y+8=0$ *و* $-10x+24y+10=0$ *با یکدیگر موازی‌اند.*

*(تمرین صفحه ۹ ـ سؤال ۸)*

*ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.*




**پاسخ:** الف)

$$\begin{cases} d_1: 5x-12y+8=0 \to m=-\frac{5}{-12}=\frac{5}{12} \\ d_2: -10x+24y+10=0 \to m'=-\frac{(-10)}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow m=m' \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

ب) روی خط $d_2$ نقطه‌ای به دلخواه مشخص می‌کنیم، مثلاً اگر قرار دهیم $x=1$ خواهیم داشت: $-10(1)+24y+10=0 \to y=0 \to A(1,0)$

حال باید فاصلهٔ نقطهٔ $A$ را از خط $d_1$ پیدا کنیم:

$$d=\frac{|5x-12y+8|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} \overset{x=1,\ y=0}{=\!=\!=} \frac{|5-0+8|}{\sqrt{25+144}}=\frac{13}{\sqrt{169}}=\frac{13}{13}=1 \to d=1$$

یعنی فاصلهٔ این دو خط موازی از یکدیگر برابر با ۱ واحد است.

## ۱ سؤالات امتحانی درس اول

**کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟**

۱. طول پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ (۲ و ۱) و (۲- و ۱-) برابر ۲۰ است. *(دبیرستان مهدیه همدان ـ دی ۱۴۰۰)* درست ☐ نادرست ☐

۲. شیب خط عمود بر خط $d$ به معادلهٔ $-3x+2y+1=0$ برابر $\frac{2}{3}$ است. *(دبیرستان نمونه دولتی بهاءالدینی قم ـ دی ۱۴۰۰)* درست ☐ نادرست ☐

۳. دو خط $-4x+6y+8=0$ و $2x-3y=4$ بر هم منطبق‌اند. *(دبیرستان نمونه دولتی بهاءالدینی قم ـ دی ۱۴۰۰)* درست ☐ نادرست ☐

۴. فاصلهٔ نقطهٔ $O$ (مبدأ مختصات) از نقطهٔ $A$ به مختصات $(x,y)$ برابر $OA=\sqrt{x^2+y^2}$ است. درست ☐ نادرست ☐

**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.**

۵. فاصلهٔ نقطهٔ $A(0,1)$ از خط $3x-1=4y$ برابر ..... است. *(نمونه دولتی اسلامیه تبارکان فراسان رضوی ـ دی ۱۴۰۰)*

۶. شرط عمود بودن دو خط آن است که شیب هر کدام ..... شیب دیگری باشد. *(استعدادهای درخشان فرزانگان مرودشت استان فارس ـ دی ۱۴۰۰)*

۷. رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به صورت $D(...,...)$ و $C(0,1)$ و $B(-1,1)$ و $A(1,2)$ هستند. ( $AC$ قطر است)

*(دبیرستان فرزانگان ۱ شیراز ـ دی ۱۴۰۰)*

۸. اگر دو خط $y=ax-1$ و $2y+3x=1$ موازی باشند، ..... $=a$ است. *(دبیرستان سعدی تبریز ـ دی ۱۴۰۰)*

**به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.**

۹. معادلهٔ خطی را بنویسید که بر خط $3y=2x+9$ عمود باشد و از نقطهٔ $A(-1,3)$ بگذرد. *(دبیرستان استعدادهای درخشان شهید صدوقی یزد ـ دی ۱۴۰۰)*

۱۰. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2,4)$ و $B(5,0)$ می‌باشند. *(دبیرستان دفترانه نیکان منطقه (۲) ـ دی ۱۴۰۰)*

الف) اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات مرکز این دایره را بنویسید.

۱۱. اگر $A(1,4)$، $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$، سه رأس مثلث $ABC$ باشند. آنگاه: *(دبیرستان فرزانگان محمد ایازی شهرستان مهاباد ـ دی ۱۴۰۰)*

الف) معادلهٔ ارتفاع $BH$ را به دست آورید.

ب) طول ارتفاع $BH$ را به دست آورید.

۱۲. اگر دو خط $2x-3y=4$ و $4x=6y-2$ دو ضلع یک مربع باشند، مساحت مربع را به دست آورید؟ *(دبیرستان فرزانگان ۱ شیراز ـ دی ۱۴۰۰)*