فصل اول: (آمار و احتمال)

درس نامه

درس ۱ (شمارش)

شمارش: در این‌جا شمارش به مفهوم محاسبه تعداد حالت‌های ممکن برای انجام کاری می‌باشد.
مثلاً: تعداد اعداد دو رقمی زوج یا تعداد کلماتی که می‌توان با حروف «روزنامه» ساخت.

مثال ۱ *با رقم‌های ۴،۳،۲ و بدون تکرار رقم چند عدد دو رقمی متمایز می‌توان نوشت؟*

پاسخ: اعداد را نوشته: ۴۳،۴۲،۳۴،۳۲،۲۴،۲۳ و می‌شماریم: ۶ تا

۱) اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگر را به n طریق انجام داد، به‌طوریکه این دو عمل را **نتوانیم با هم انجام دهیم**، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول «**یا**» عمل دوم را انجام داد.
اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.

مثال ۲ *می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟* *(نهایی شهریور ۱۳۹۹)*

پاسخ: از بین خودروهای سواری یا وانت یا کامیون، باید انتخاب کنیم پس طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ما می‌شود: $۱۰+۱۲+۶=۲۸$

۲) اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوریکه برای انجام مرحله اول m روش «و» برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل این کار به $m\times n$ روش قابل انجام است.
اصل ضرب به بیش از دو عمل قابل تعمیم است.
برخلاف اصل جمع، در اصل ضرب عمل‌ها با هم انجام می‌شوند.

مثال ۳ *مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند:*

الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟ *(نهایی دی ماه ۱۳۹۹)*

پاسخ: الف) این یک کتاب از بین کتاب‌های ریاضی یا عربی یا ادبیات انتخاب می‌شود. طبق اصل جمع داریم: $۳+۲+۴=۹$

ب) یک کتاب ریاضی و یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات باید انتخاب شود. طبق اصل ضرب داریم: $۳\times۲\times۴=۲۴$

مثال ۴ *با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟* *(نهایی خرداد ماه ۱۳۹۹)*

پاسخ: برای این ۳ رقم، از چپ به راست ۳ جایگاه در نظر می‌گیریم:

$$\underset{\text{جایگاه(۳)}}{\underline{\qquad}}\times\underset{\text{جایگاه(۲)}}{\underline{\qquad}}\times\underset{\text{جایگاه(۱)}}{\underline{\qquad}}$$

در جایگاه (۱) هر کدام از ۷ عدد داده شده می‌توانند قرار بگیرند: $\underline{۷}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}$

در جایگاه (۲) به‌جز عددی که در جایگاه (۱) قرار گرفته، ۶ عدد دیگر می‌توانند قرار بگیرند: $\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{\quad}$

در جایگاه (۳) به‌جز دو عدد استفاده شده، ۵ عدد دیگر می‌توانند قرار بگیرند: $\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵}=۲۱۰$

۳) فاکتوریل: حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را با علامت $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل می‌نامیم.

$$n!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times n$$

مثلاً:

$$۱!=۱$$
$$۲!=۱\times۲=۲$$
$$۳!=۱\times۲\times۳=۶$$
$$۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$
$$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$$

نکات

۱- $۰! = ۱$

۲- $n! = n(n-۱)!$

مثلاً: $۷! = ۷ \times ۶!$

۳- فاکتوریل فقط در تقسیم بر خودش ساده می‌شود.

مثلاً: $\frac{\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۱$ ، $\frac{\cancel{۱۰!}}{\cancel{۱۰!}} = ۱$ ، $\frac{\cancel{k!}}{\cancel{k!}} = ۱$ ، ...

مثال ۵ *حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل بنویسید.*

الف) $۳! \times ۴!$ *ب)* $(۳!)!$ *پ)* $\frac{۸!}{۲! \times ۶!}$ *ت)* $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$ *ث)* $۲ \times (۳!)^۲$

پاسخ: الف) $۳! \times ۴! = (۳\times۲\times۱)\times(۴\times۳\times۲\times۱) = ۶ \times ۲۴ = ۱۴۴$

ب) $(۳!)! = (۳\times۲\times۱)! = ۶! = ۷۲۰$

پ) $\frac{۸!}{۲! \times ۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times \cancel{۶!}}{۲ \times ۱ \times \cancel{۶!}} = ۲۸$

ت) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)\times n \times (n-۱)!}{(n-۱)!} = n^۲ + n$

ث) $۲ \times (۳!)^۲ = ۲ \times (۶)^۲ = ۷۲$

۴) جایگشت: تعداد حالت‌هایی که n شیء متمایز می‌توانند کنار هم قرار بگیرند را جایگشت n شیء می‌نامیم. $\boxed{P_n = n!}$

جایگشت هنگامی استفاده می‌شود که **ترتیب مهم باشد**. (مانند: صف، عدد، کلمه و ....)

مثال ۶ *در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به‌طوریکه ۳ نفر آنها، مجاز به رانندگی باشند؟* *(کنکور انسانی ۱۳۹۹)*

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۴

پاسخ: ۳ نفری که مجاز به رانندگی هستند، به ۳ حالت می‌توانند پشت فرمان بنشینند. بجز راننده ۴ نفر دیگر به $۴!$ می‌توانند در بقیه صندلی‌ها جابه‌جا شوند.

پس در کل: $۳ \times ۴! = ۳ \times ۲۴ = ۷۲$

و گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۷ *با حروف کلمه «سلطانی» چند کلمه بامعنی و بی‌معنی می‌توان نوشت، هرگاه:*

الف) ۶ حرفی باشند؟ *ب) ۶ حرفی باشند که با حرف «س» شروع شوند؟*

پ) ۶ حرفی باشند که حرف اول «ط» و حرف آخر «ل» باشند؟ *ت) ۶ حرفی باشند که شامل عبارت «سال» باشند؟*

پاسخ: الف) جایگشت ۶ شیء متمایز: $۶! = ۷۲۰$

ب) حرف «س» ثابت و بدون جایگشت است. پس ۵ حرف جایگشت دارند: $۵! = ۱۲۰$

پ) دو حرف «ط» و «ل» بدون جایگشت‌اند و ۴ حرف دیگر جایگشت دارند: $۴! = ۲۴$

ت) عبارت «سال» به عنوان یک حرف به حساب می‌آیند و با ۳ حرف دیگر ۴ حرف می‌شوند: $۴! = ۲۴$

جایگشت ناقص: تعداد حالاتی که r شیء از بین n شیء متمایز را می‌توان کنار هم چید، جایگشت یا تبدیل r شیء از n شیء می‌نامیم:

$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}} \qquad ۰ \le r \le n$$

در جایگشت ترتیب مهم است.

مثال ۸ *به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)* *(نوبت شهریور ۱۳۹۸)*

پاسخ: ترتیب بین رقم‌ها مهم است، بنابراین جایگشت ۴ شیء از ۷ شیء را داریم:

$$P(۷,۴) = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۸۴۰$$

۵) ترکیب: ترکیب، انتخاب r شیء از n شیء متمایز است که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد.

ترکیب، هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی است.

$$\boxed{C_r^n = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}} \quad ; \quad ۰ \le r \le n$$

مثال۹) مجموعه هشت عضوی $A=\{۱,۲,۳,...,۸\}$، چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ *(نهایی خرداد ۹۸ ـ شهریور ۹۹)*

پاسخ: در مجموعه‌ها، ترتیب عضوها مهم نیست. پس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه هشت عضوی همان ترکیب ۳ از ۸ است.

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times ۵!}=\frac{۸\times ۷\times \cancel{۶}\times \cancel{۵!}}{\cancel{۶}\times \cancel{۵!}}=۵۶$$

ویژگی‌های فرمول ترکیب:

روابط زیر، محاسبات ترکیب را ساده‌تر و سریع‌تر می‌کند:

مثال	نکته
$\binom{۵}{۰}=۱$	$\binom{n}{۰}=۱$
$\binom{۵}{۵}=۱$	$\binom{n}{n}=۱$
$\binom{۶}{۱}=۶$	$\binom{n}{۱}=n$
$\binom{۶}{۵}=۶$	$\binom{n}{n-۱}=n$
$\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$	$\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$
$\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times ۶\times ۵}{۶}=۳۵$	$\binom{n}{۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$
$\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}=۱۰$	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

مثال۱۰) *به چند طریق می‌توان ۳ توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟* *(نهایی خرداد ۹۹)*

پاسخ: برای همرنگ بودن، هر ۳ باید قرمز **یا** هر ۳ باید آبی باشند. بنابراین طبق اصل جمع داریم:

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}=۱۰+۴=۱۴$$

مثال۱۱) *از بین ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۴ کتاب فیزیک متفاوت، می‌خواهیم ۳ کتاب انتخاب کنیم به‌طوری‌که حداقل یک کتاب ریاضی انتخاب شود، چند حالت ممکن است؟*

پاسخ: باید یک کتاب ریاضی و دو کتاب فیزیک یا دو کتاب ریاضی و یک کتاب فیزیک ویا هر سه کتاب ریاضی باشند، بنابراین:

$$\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}=۵\times ۶+۱۰\times ۴+۱۰=۸۰$$

۱ سؤالات امتحانی درس اول

● اصل جمع و ضرب

۱. می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم. *(نهایی دی ماه ۱۴۰۰)*

۲. از بین ۳ کتاب ریاضی، ۴ کتاب فیزیک و ۵ کتاب فارسی به چند طریق می‌توان:

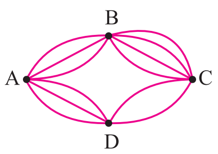
الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد؟

ب) یک کتاب ریاضی و یک کتاب فارسی انتخاب کرد؟

پ) سه کتاب با عناوین مختلف انتخاب کرد؟

ت) دو کتاب با عناوین متفاوت انتخاب کرد؟

۳. مطابق شکل مقابل بین شهرهای A و B و C و D راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد. *(نهایی خرداد ۱۳۹۹)*



۴. ارقام ۱ تا ۹ مفروض‌اند. (بدون تکرار) *(نهایی دی ماه ۱۳۹۷)*

الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۵. با ارقام موجود در مجموعه $\{۱,۲,۴,۶,۷,۸\}$، چند عدد ۵ رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ *(کنکور انسانی ۱۳۹۸)*

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۶. با حروف کلمه «مهرسان» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی‌معنی): *(نهایی دی ماه ۱۴۰۰)*

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

۷. با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی): *(نهایی شهریور ۱۳۹۹)*

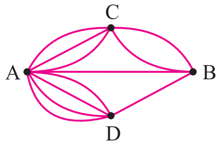
الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

۸. با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۵ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ *(کنکور انسانی ۱۳۹۸)*

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۹. مطابق شکل مقابل، ۴ شهر **A**، **B**، **C** و **D** را راه‌هایی به هم وصل می‌کنند، که همگی دو طرفه هستند.



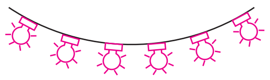
مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر **A** به شهر **B** مسافرت کرد؟

ب) از شهر **A** به شهر **B** و از طریق شهر **C** مسافرت رفت و برگشت انجام داد، به نحوی که در برگشت از راه‌هایی که رفته استفاده نشود؟

پ) از شهر **C** و بدون عبور از شهر **B** به شهر **D** مسافرت کرد؟

۱۰. با استفاده از لامپ‌های رنگی آبی، قرمز، سبز، زرد و سفید به چند طریق می‌توان ریسه‌ای از لامپ‌های رنگی به صورت مقابل درست کرد، به‌طوری‌که:



الف) هیچ شرطی نباشد.

ب) لامپ‌های مجاور هم‌رنگ نباشند.

● جایگشت

۱۱. درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۷ کتاب در یک قفسه کنار هم برابر با !۷ است. درست ☐ نادرست ☐

ب) تساوی $۲!=\frac{۶!}{۳!}$ همواره برقرار است. *(نهایی فرداد ۹۹)* درست ☐ نادرست ☐

پ) ساده شده عبارت $\frac{(n-۳)!}{(n-۴)!}$ برابر با $(n-۴)$ است. درست ☐ نادرست ☐

ت) برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به‌صورت $۰!=۱$ و $۱!=۱$ تعریف می‌کنیم. *(نهایی شهریور ۹۹)* درست ☐ نادرست ☐

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۵ نفر در یک صف به‌طوریکه دو نفر مشخص کنار هم باشند برابر با $۲\times۵!$ است. درست ☐ نادرست ☐

ج) $۶!=۳!+۳!$ درست ☐ نادرست ☐

۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

الف) $\frac{۵!}{۲!(۵-۲)!}$ ب) $\frac{۷!}{۴!۳!}$ پ) $\frac{(n+۲)!}{(n-۱)!}$

ت) $\frac{۴!-۳!}{۵!-۲!}$ ث) $۴!+۳!+۲!+۱!$

۱۳. از جابه‌جایی حروف کلمه «خوزستان» چند کلمه می‌توان ساخت که:

الف) با حرف «خ» شروع شود؟

ب) در آنها حروف عبارت «ستان» کنار هم بیایند؟

پ) در آنها حروف عبارت «ستان» دقیقاً به این صورت وجود نداشته باشد؟

۱۴. ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد پنج رقمی‌های حاصل را بیابید.