فصل اول: (آشنایی با نظریهٔ اعداد)

درس‌نامه

درس ۱ (استدلال ریاضی)

برای اینکه ثابت کنیم گزاره‌ای درست است یا نادرست، باید از استدلال استفاده کنیم. درک و فهم بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضی را محدود به حفظ کردن می‌کند. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و درک آن کمک می‌کند.

استدلال در حالت کلی به یکی از دو روش زیر انجام می‌شود:

انواع استدلال

۱. **استدلال استقرایی:** استدلالی است که در آن به کمک تجربه و آزمایش بتوانیم حکمی را ثابت کنیم. به عبارتی دیگر به روش حکم کردن بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات، استدلال استقرایی گفته می‌شود. (از جزء به کل رسیدن)

۲. **استدلال استنتاجی:** استدلالی است که در آن با استفاده از احکام درست قبلی، بتوانیم حکم جدیدی را ثابت کنیم (از کل به جزء رسیدن)

نکته دقت کنید که جواب استدلال استنتاجی، چون براساس اثبات‌های درست قبلی است همیشه درست است.
در ریاضیات ما فقط استدلال استنتاجی را قبول داریم که ابتدا انواع آن را نام می‌بریم و سپس به بررسی هر یک از آن‌ها می‌پردازیم.

انواع استدلال استنتاجی

- اثبات مستقیم
- مثال نقض
- روش اشباع
- برهان خلف
- اثبات بازگشتی

۱. اثبات مستقیم

برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم، ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضیات، کمک مهمی به شما می‌کند:

عبارت فارسی	نماد ریاضی
عدد زوج	$2k$
عدد فرد	$2k+1$
عدد مضرب ۳	$3k$
عدد مربع کامل	k^2
عدد فرد مربع کامل	$(2k+1)^2$
وارون عدد m	$\frac{1}{m}$

عبارت فارسی	نماد ریاضی
دو عدد فرد	$2k+1 , 2k'+1$
دو عدد زوج	$2k , 2k'$
دو عدد فرد متوالی	$2k-1 , 2k+1$
دو عدد زوج متوالی	$2k , 2k+2$
سه عدد متوالی	$k-1 , k , k+1$
عدد گویا	$\frac{a}{b} , a , b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$

مثال ۱ *با استفاده از اثبات مستقیم ثابت کنید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، a^2+b^2 زوج است.*

(فرداد ۹۸ خارج از کشور) (کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ: با توجه به فرد بودن حاصل‌ضرب ab، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو عدد a و b فرد هستند پس با فرض صحیح بودن دو عدد m و n می‌توانیم برای a و b بنویسیم:

$$\left.\begin{matrix} a = 2n-1 \\ b = 2m-1 \end{matrix}\right\} \to a^2+b^2 = (2n-1)^2 + (2m-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 = 4n^2 + 4m^2 - 4n - 4m + 2$$

$$= 2\underbrace{(2n^2 + 2m^2 - 2n - 2m + 1)}_{k} \Rightarrow \underbrace{a^2+b^2 = 2k}_{\text{یعنی } a^2+b^2 \text{ یک عدد زوج است.}} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۲ با استفاده از اثبات مستقیم ثابت کنید مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. *(مثال حل شدهٔ کتاب درسی)*

پاسخ: سه عدد متوالی a، b و c را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a = k - 1 , b = k , c = k + 1$$

$$a + b + c = k \cancel{-1} + k + k \cancel{+1} = \underbrace{3k}_{\text{مضرب ۳ است.}}$$

نکته حاصل‌ضرب دو عدد متوالی، یک عدد زوج است.

مثال ۳ الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. *(نهایی شهریور ۹۸) (کار در کلاس کتاب درسی)*

ب) اگر از مربع عددی فرد، یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. *(نهایی خرداد ۹۹)*

پاسخ: الف) دو عدد فرد x و y را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 2k' + 1 \end{cases} \to x + y = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2$$

$$= 2\underbrace{(k + k' + 1)}_{q} = \underbrace{2q}_{\text{یک عدد زوج}}$$

ب) عدد فرد x را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x = 2k + 1 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 = (2k + 1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد از طرفین کم می‌کنیم}}$$

$$x^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + \cancel{1} - \cancel{1} = 4k^2 + 4k = 4\overbrace{\underbrace{k(k + 1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است}}}^{2q}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 4(2q) \Rightarrow x^2 - 1 = \underbrace{8q}_{\text{مضرب ۸ است.}}$$

۲. مثال نقض

اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی همان‌طور که می‌دانیم، می‌تواند درست یا نادرست باشد. به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلی غلط است، **مثال نقض** می‌گویند. به عنوان نمونه، «تمام اعداد اول، فرد هستند» این یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عدد اول است ولی فرد نیست.

نکته اگر حکمی درست باشد، درست بودن آن را باید با اثبات مستقیم ثابت کنیم و اگر مدعی شدیم که حکم غلط است، باید برای ادعای خود و اثبات نادرست بودن، مثال نقض بیاوریم.

مثال ٤ برای اثبات نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر یک مثال نقض ارائه دهید:

الف) اگر x و y اعداد گنگی باشند، آنگاه x^y یک عدد گنگ است.

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است. *(نهایی شهریور ۹۸ و نهایی دی ۹۹)*

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ *(نهایی شهریور ۹۹) (نهایی خرداد ۱۴۰۰ خارج از کشور)*

ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. *(نهایی شهریور ۹۹)*

پاسخ:

الف) اگر $x = 2^{\sqrt{2}}$ و $y = \sqrt{2}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$x^y = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4 \in Q \quad (\text{عدد گویا})$$

ب) اگر $n = 4$ در نظر بگیریم، داریم:

$$n = 4 \to 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \text{عدد اول نیست.}$$

پ) اگر $x = 1$ و $y = 1$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \to \sqrt{1 + 1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} \to \sqrt{2} \neq 2$$

ت) اگر $x = \sqrt{2} + 1$ و $y = 1 - \sqrt{2}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$x + y = \sqrt{2} + 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 \in Q \quad (\text{گویا})$$

۳. روش اشباع

گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همهٔ حالت‌های ممکن در مورد مسأله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را، روش اشباع می‌نامند. به عنوان نمونه اگر در مسأله قید نشود که عدد گفته شده در مسأله زوج است یا فرد، باید همهٔ حالت‌ها را برای اثبات در نظر بگیریم.

مثال ۵ *ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.*

پاسخ: چون در صورت مسأله قید نشده که اولین عدد صحیح انتخاب شده زوج است یا فرد، باید در حل مسأله دو حالت را در نظر بگیریم؛ دو عدد متوالی به صورت a و $a+1$ است بنابراین:

حالت اول: اگر a عددی زوج باشد:

$$\left.\begin{matrix} a=2k \\ k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\} \Rightarrow a(a+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{q}=\underbrace{2q}_{\text{زوج است}}$$

حالت دوم: اگر a عددی فرد باشد:

$$\left.\begin{matrix} a=2k+1 \\ k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\} \Rightarrow a(a+1)=(2k+1)(2k+1+1)$$

$$=(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}=\underbrace{2q}_{\text{زوج است}}$$

مثال ۶ *ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7، عددی فرد است.* *(مثال کتاب درسی)*

پاسخ: هر عدد طبیعی زوج یا فرد است، بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر n زوج باشد، داریم:

$$n=2k\,,\,k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+7=\underbrace{4k^2-10k+6}+1\ \underset{=}{\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}}\ 2\underbrace{(2k^2-5k+3)}_{q}+1=\underbrace{2q+1}_{\text{یک عدد فرد}}$$

حالت دوم: اگر n فرد باشد، داریم:

$$n=2k+1\,,\,k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2-5n+7=(2k+1)^2-5(2k+1)+7$$

$$=4k^2+4k+1-10k-5+7$$

$$=4k^2-6k+3=\underbrace{4k^2-6k+2}+1$$

$$\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}\ 2\underbrace{(2k^2-3k+1)}_{q}+1=\underbrace{2q+1}_{\text{یک عدد فرد}}$$

۴. برهان خلف

گاهی با حکم‌هایی روبه‌رو هستیم که دو حالتِ ممکن بیشتر ندارند: درست یا نادرست به برهانی که در آن با رد نادرست بودن حکمی، درست بودن آن را ثابت کنیم، برهان خلف می‌گوییم. به عنوان نمونه، الان یا شب است یا روز. فرض کنید اثبات مستقیم اینکه الان روز است برای ما مقدور نباشد کافی است فرض کنیم شب است، پس آن را به تناقض برسانیم، خوب پس نتیجه می‌گیریم که الان روز است.

مراحل اثبات غیرمستقیم

۱. ابتدا فرض می‌کنیم که حکم داده شده غلط است و خلاف حکم مسأله، درست است. (فرض خلف)

۲. با استفاده از اثبات مستقیم، ثابت می‌کنیم که فرض خلف غلط است به عبارتی دیگر باید ثابت کنیم که فرض خلف یا فرض داده شده یا واقعیت منطقی در تناقض است.

۳. وقتی به تناقض رسیدیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

فرض خلف ← اثبات نادرست بودن فرض خلف ← فرض خلف باطل ← حکم ثابت است

مثال ۷ *نشان دهید که با فرض صحیح بودن n، اگر n^2 فرد باشد، n نیز فرد است.*

پاسخ: n^2 فرد **: فرض** — n فرد **: حکم**

برهان خلف: فرض می‌کنیم که n فرد نباشد (فرض خلف) پس باید زوج باشد، بنابراین:

$$n=2k\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}n^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{q}\Rightarrow n^2=\underbrace{2q}_{\text{یک عدد زوج}}$$

با فرض در تناقض است ← فرض خلف باطل است ← حکم ثابت می‌شود.

مثال ۸ *اگر α و β دو عدد گنگ باشند، ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.* *(دی ۹۷)*

پاسخ: حکم: $\{\alpha+2\beta$ گنگ — فرض: $\left\{\begin{matrix}\alpha\,,\,\beta & \text{گنگ}\\ \alpha+\beta & \text{گویا}\end{matrix}\right.$

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس باید گویا باشد.

می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی است گویا. طبق فرض $\alpha+\beta$ گویاست، بنابراین:

$$(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\cancel{\alpha}+2\beta-\cancel{\alpha}-\beta=\beta\rightarrow \text{گویا}$$

با فرض در تناقض است ← فرض خلف باطل است ← حکم ثابت می‌شود.

نکته وقتی می‌گوییم دو عدد نسبت به هم اول هستند، یعنی هیچ مقسوم علیه‌ای جز ۱ ندارند در این صورت آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:
$(a,b)=1$

مثال ۹ *با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}$ عددی گنگ است.*

پاسخ: فرض می‌کنیم $\sqrt{5}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس باید گویا باشد. بنابراین داریم: $\sqrt{5}=\frac{a}{b}\ ,\ (a,b)=1\ ,\ b\neq 0$

یعنی $\sqrt{5}$ را برابر با یک کسری مانند $\frac{a}{b}$ در نظر می‌گیریم که a و b نسبت به هم اول هستند یعنی این کسر ساده شدنی نیست، بنابراین:

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(\sqrt{5})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2\rightarrow 5=\frac{a^2}{b^2}\rightarrow$$

$a^2=5b^2 \Rightarrow$ a^2 مضرب ۵ است. $\Rightarrow$ a نیز مضرب ۵ است. (۱)

$a=5k\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}a^2=25k^2\xrightarrow{(1)}\cancel{5}b^2=\cancel{25}k^2\rightarrow b^2=5k^2\rightarrow$ b^2 مضرب ۵ است. $\rightarrow$ b نیز مضرب ۵ است (۲)

$(1),(2)\Rightarrow$ a , b مضرب ۵ است. $\rightarrow$ با اول بودن a و b نسبت به هم در تناقض است. $\rightarrow$ فرض خلف باطل است. $\rightarrow$ حکم ثابت می‌شود.

مثال ۱۰ *می‌دانیم $\sqrt{3}$ یک عدد گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ یک عدد گنگ است.*

پاسخ:

حکم: $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ گنگ است.

فرض: $\sqrt{3}$ گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم که $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس باید گویا باشد، پس:

$$\sqrt{\sqrt{3}+1}=a\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}\left(\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)^2=a^2$$

$$a\in Q\rightarrow\sqrt{3}+1=a^2\rightarrow\sqrt{3}=\underbrace{a^2-1}_{\text{یک عدد گویا}}\in Q$$

با فرض در تناقض است ← فرض خلف باطل است ← حکم ثابت است.

۵. اثبات بازگشتی

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، (مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها) با فرض درستی حکم و ساده کردن حکم با عملیات مجاز به یک رابطه بدیهی (یا فرض قضیه) می‌رسیم. در چنین حالتی برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود. این روش اثبات را، اثبات بازگشتی می‌نامند.

مراحل اثبات بازگشتی:

۱. درستی حکم را موقتاً می‌پذیریم.

۲. با شروع از حکم و ساده کردن آن در چند مرحله به یک رابطهٔ بدیهی یا فرض داده شده می‌رسیم.

۳. اکنون اگر تمام مراحل را بتوان از آخر به اول نتیجه گرفت، یعنی اعمال انجام شده برگشت‌پذیر باشند و حکم تأیید می‌شود (باید همهٔ فلش‌ها را دوطرفه کنیم).

مثال ۱۱ *ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.* *(خرداد ۹۸ و دی ۱۴۰۰ خارج از کشور)*

پاسخ: اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\longleftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\longleftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0\longleftrightarrow\underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0}_{\text{یک امر بدیهی، پس بازگشت‌پذیر است}}$$

مثال ۱۲ *گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید:* *(خرداد ۹۸ ـ خارج از کشور)*

برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$

پاسخ:

$$2\times(x^2+y^2+1\geq xy+x+y)\longleftrightarrow 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y\longleftrightarrow 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y\geq 0\longleftrightarrow$$

$$x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y\geq 0\longleftrightarrow(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)\geq 0\longleftrightarrow\underbrace{(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2\geq 0}_{\text{یک امر بدیهی، پس بازگشت‌پذیر است.}}$$

مثال ۱۳ *برای اعداد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:* $a^2+b^2+b(a^2+1)\geq 4ab$

پاسخ:

$$a^2+b^2+b(a^2+1)\geq 4ab\longleftrightarrow a^2+b^2+ba^2+b-4ab\geq 0\longleftrightarrow a^2+b^2+ba^2+b-2ab-2ab\geq 0\longleftrightarrow a^2-2ab+b^2+b+ba^2-2ab\geq 0$$

$$\longleftrightarrow(a-b)^2+b\,(a^2-2a+1)\geq 0\longleftrightarrow\underbrace{(a-b)^2+b(a-1)^2\geq 0}_{\text{یک امر بدیهی، پس بازگشت‌پذیر است.}}$$

۱ سؤالات امتحانی درس اول

۱. عبارت‌های زیر را کامل کنید:

الف) گزارهٔ «عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای تمام اعداد طبیعی n، عددی اول است» به ازای $n=۵$ برقرار نیست و $n=۵$ را یک .... برای این گزاره می‌گوییم.

ب) اگر حکم مسأله‌ای روی یک دامنهٔ متناهی تعریف شود و درستی حکم را با قرار دادن هر یک از اعضای دامنه در آن بررسی کنیم، روش اثبات مسأله .... است.

پ) سه گزارهٔ «اگر x مضرب ۳ باشد، $x(x-۳)$ مضرب ۹ است»، «مجموع دو عدد گنگ عددی گنگ است» و «مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است» را به ترتیب با استدلال‌های .... ، .... و............... تأیید یا رد می‌کنیم.

۲. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است. (دی ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq ۰$ تساوی $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a+b}$ برقرار است. (دی ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

پ) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد خارج از کشور ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

ت) اگر $a>۰$ باشد، آنگاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ است. (خرداد خارج از کشور ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

خ) مربع هر عدد فرد، فرد است. (خرداد خارج از کشور ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

ر) عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^۳<x^۲$ (خرداد خارج از کشور ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

ز) بین هر دو عدد گنگ، عدد گویا وجود دارد. درست ☐ نادرست ☐

م) عدد $۳^n+۴$ برای هر عدد طبیعی n، عدد اول است. درست ☐ نادرست ☐

۳. با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر p و $p+۲$، $(p\geq ۵)$ دو عدد اول باشند، آنگاه $p+۱$ مضرب ۶ است.

۴. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح متوالی به اضافهٔ یک، مربع کامل است.

۵. برای اثبات نادرستی هر یک از احکام زیر، یک مثال نقض ارائه دهید.

الف) مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، گنگ است.

ب) هیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

پ) اگر x و y دو عدد گنگ باشند، آنگاه $\frac{۲x+y}{۲x-y}$ نیز عدد گنگ است.

ت) به ازای هر عدد طبیعی n، $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.

خ) اگر a، b و c سه عدد گنگ باشند، آنگاه $abc^۳$ یک عدد گنگ است.

۶. گزارهٔ درست را ثابت کرده و برای رد گزارهٔ نادرست، مثال نقض بیاورید.

الف) اگر $n^۲$ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۲۰ بخش‌پذیر است.

ب) اگر a و b دو عدد طبیعی فرد باشند، آنگاه $a^۲-b^۲$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

پ) برای هر x حقیقی، $\sin ۲x = ۲\sin x$.

ر) به ازای هیچ دو عدد اول a و b، عدد $a+b$ اول نیست.

ز) اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+۲)$ هم فرد است.

۷. اگر n عددی فرد باشد، ثابت کنید $n^۲-۵n+۷$ نیز عددی فرد است. (خرداد خارج از کشور ۱۴۰۱)

۸. در معادلهٔ $|x-۵|+|x-۳|=۱۰$ اگر x عدد حقیقی باشد، ثابت کنید تنها جواب‌های معادله $x=۹$ و $x=-۱$ هستند.

۹. با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن، ثابت کنید تنها عدد طبیعی و اول مانند p که هر سه عدد p، $p+۴$ و $p+۸$ اول باشند، $p=۳$ است.

۱۰. برای هر عدد طبیعی n، عدد $n^۳-n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۱۱. گزارهٔ مقابل را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید. $y^۲+۱\geq -۲x(y+x+۱)$ (دی ۱۴۰۱)

۱۲. $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ اعدادی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند.
ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۳.	اگر $n^{۳}$ مضرب ۵ باشد، نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)	*(تمرین کتاب درسی)*
۱۴.	آیا دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند؟ الف) نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. ب) فاصلهٔ نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.	*(کار در کلاس کتاب درسی)*
۱۵.	اگر x یک عدد گویا و $\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $۲x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یک عدد گنگ است.	
۱۶.	می‌دانیم $\sqrt{۶}$ عددی گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ نیز عددی گنگ است.	
۱۷.	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\log_{۲}۵$ عددی گنگ است.	
۱۸.	با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، ثابت کنید: الف) از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد. ب) اگر سه خط راست d، d' و d'' دو به دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$ آنگاه $d \parallel d''$.	
۱۹.	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطهٔ $x^{۴}+y^{۴} \geq x^{۳}y+xy^{۳}$ را ثابت کنید.	
۲۰.	اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد، به روش بازگشتی ثابت کنید:	$\lvert \sin x+\cos x \rvert \leq \sqrt{۲}$

درس ۲ (بخش‌پذیری در اعداد صحیح)

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq ۰$ بخش‌پذیر می‌گوییم، هر گاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $a=bq$ در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم b می‌شمارد a را و یا اینکه b عاد می‌کند a را. به عبارت دیگر:

$$\boxed{b\,|a \Leftrightarrow a=bq}$$

توجه برای رابطهٔ $b|a$ دو تعبیر می‌توان به کار برد، که یکی از چپ به راست خوانده می‌شود و دیگری از راست به چپ:

$b\,|\,a$ { (۱) b شمارنده یا مقسوم‌علیه یا عامل a است — (۲) a مضرب b است یا a بر b بخش‌پذیر است }

راه تشخیص بخش‌پذیری

برای تشخیص اینکه کدام رابطهٔ عاد کردن درست است یا نه، از قانون پادساعت‌گرد استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال:

$۳\,|۱۸ \to \frac{۱۸}{۳}=۶$ (عدد صحیح) → پس رابطه درست است

$۲۴|۶ \to \frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$ (عدد صحیح نیست) → پس رابطهٔ عاد کردن صحیح نیست.

نتیجه: اگر دو عدد بر هم بخش‌پذیر نباشند به عبارتی دیگر اگر a بر b بخش‌پذیر نباشد، می‌نویسیم: $b \nmid a$

مثال ۱۴ *با توجه به تعریف رابطهٔ عادکردن، دلیل درستی رابطه‌های زیر را بیان کنید:*

الف) $۵\,|\,۴۵$ ب) $-۳\,|\,۳۹$ پ) $۴\,|-۳۲$ ت) $۵ \nmid ۱۷$

پاسخ:

الف) $۵\,|\,۴۵ \to \frac{۴۵}{۵}=۹ \to$ عدد صحیح → درست است
$\to ۴۵=۹\times ۵$

ب) $-۳\,|\,۳۹ \to \frac{۳۹}{-۳}=-۱۳ \to$ عدد صحیح → درست است
$۳۹=(-۳)\times(-۱۳)$

پ) $۴\,|-۳۲ \to \frac{-۳۲}{۴}=-۸ \to$ عدد صحیح → درست است
$۳۲=(+۴)\times(-۸)$

ت) $۵ \nmid ۱۷ \to \frac{۱۷}{۵}=۳/۴ \to$ عدد صحیح نیست $\to ۵ \nmid ۱۷$ درست است