فصل چهارم: (مشتق)

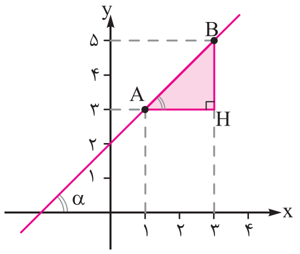
درس‌نامه

درس ۱ (آشنایی با مفهوم مشتق)

از آنجا که مفهوم مشتق، ارتباط تنگاتنگی با شیب خط دارد ابتدا به‌طور خلاصه مطالبی در مورد شیب خط به عنوان یادآوری مطرح می‌کنیم:

۱) شیب خط، نسبت جابه‌جایی عرضی دو نقطهٔ دلخواه از خط به جابه‌جایی طولی همان دو نقطه است. به عنوان مثال، شیب خطی که از دو نقطهٔ $A(۱,۳)$ و $B(۳,۵)$ می‌گذرد برابر است با:

$$\boxed{m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}\to m_{AB}=\frac{۵-۳}{۳-۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$



در واقع وقتی ما از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رویم، به اندازهٔ ۲ واحد جابه‌جایی عرضی داریم (از $y_A=۳$ تا $y_B=۵$) و به اندازهٔ ۲ واحد نیز جابه‌جایی طولی داریم (از $x_A=۱$ تا $x_B=۳$) که نسبت آنها $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۲}{۲}=۱$ می‌شود.

پس شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر با یک است.

۲) شیب یا ضریب زاویهٔ خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

یعنی: $\boxed{m=\tan\hat{\alpha}}$

باید دانست که این دو تعریف هیچ تناقضی با یکدیگر ندارند و در واقع هر دو به یک معنی می‌باشند فرض کنید در شکل بالا، می‌خواهیم به کمک تانژانت زاویهٔ $\hat{\alpha}$ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را بیابیم:

از A و B خطوطی به ترتیب و به موازات محور x ها و محور y ها رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند.

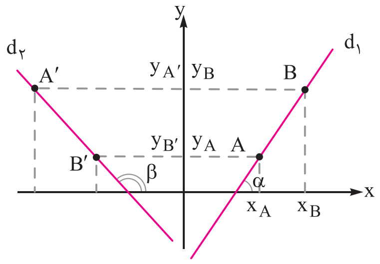
در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABH}$ داریم:

$$\tan\hat{\alpha}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}\to\tan\hat{\alpha}=\frac{BH}{AH}=\frac{۲}{۲}=۱$$

همان‌طور که می‌بینیم، $AH=\Delta x$ و $BH=\Delta y$ است و نسبت $\frac{BH}{AH}$ همان نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ می‌باشد که در تعریف (۱) اشاره کردیم و زاویهٔ $B\hat{A}H$ هم با زاویهٔ $\hat{\alpha}$ که خط d با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر است (خطوط موازی و مورّب).

شیب منفی و شیب مثبت:

به کمک هر دو تعریف می‌توانیم درک کنیم که شیب کدام خط‌ها، مثبت و شیب چه خطوطی منفی است؟ به شکل زیر دقت کنید:



در خط $d_۱$ وقتی از نقطهٔ دلخواه A به نقطهٔ B حرکت می‌کنیم هم طول A در حال افزایش است و هم عرض A، یعنی:

$$\begin{cases}y_B>y_A\\ y_B-y_A>۰\end{cases},\quad\begin{cases}x_B>x_A\\ x_B-x_A>۰\end{cases}$$

پس داریم:

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}>۰$$

یعنی شیب خط‌هایی مانند $d_۱$ که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ حادّه (تند) می‌سازند، عددی مثبت است. همین موضوع به کمک تعریف دوم هم قابل درک است زیرا اگر: $۰^\circ<\hat{\alpha}<۹۰^\circ$ باشد یعنی انتهای زاویهٔ $\hat{\alpha}$ در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی باشد مقدار $\tan\hat{\alpha}$ هم مثبت خواهد شد.

$$\boxed{۰<\hat{\alpha}<۹۰\Rightarrow\tan\alpha>۰}$$

امّا در خط $d_۲$، با حرکت از نقطهٔ A' به B'، طول در حال افزایش و عرض در حال کاهش است یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}x_{B'}>x_{A'}\to x_{B'}-x_{A'}>۰\\ y_{B'}<y_{A'}\to y_{B'}-y_{A'}<۰\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}}=\frac{\text{عدد}(-)}{\text{عدد}(+)}<۰$$

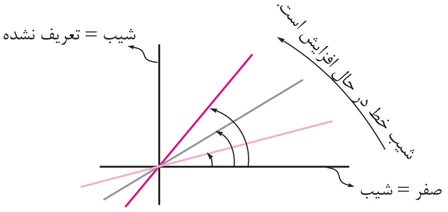
یعنی شیب خطوطی مانند $d_۲$ که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ منفرجه (باز) می‌سازند عددی منفی است.

به‌طور مشابه، به کمک تعریف دوم شیب خط، وقتی زاویهٔ $\hat{\alpha}$ بین ۹۰° و ۱۸۰° باشد $۹۰^\circ<\hat{\alpha}<۱۸۰$ یعنی انتهای زاویهٔ β در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است و در ربع دوم علامت تانژانت منفی است پس شیب خط منفی است.

$$۹۰^\circ<\hat{\alpha}<۱۸۰^\circ\Rightarrow\tan\hat{\alpha}<۰$$

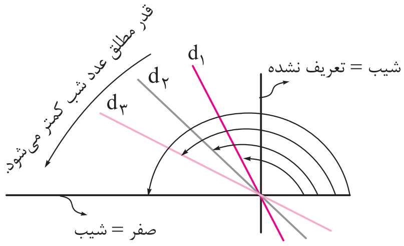
تغییرات شیب‌های مثبت و منفی:

الف) وقتی خط با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ حاده می‌سازد، یعنی وقتی $\hat{\alpha}$ بین صفر و نود درجه تغییر می‌کند هر قدر زاویه بزرگ‌تر باشد شیب خط هم بیشتر می‌شود یعنی وقتی از سمت صفر درجه به سمت نود درجه می‌رویم شیب خط در حال افزایش است.



ب) وقتی خط با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ منفرجه می‌سازد یعنی وقتی $\hat{\alpha}$ بین نود و صدوهشتاد درجه است.

برای فهم بهتر این قسمت، فرض کنید زاویه‌ای که خط d_1 با جهت مثبت محور x ها می‌سازد ۱۲۰°، زاویهٔ d_2، ۱۳۵° و زاویهٔ d_3، ۱۵۰° باشد داریم:



$$d_1 \text{ شیب} = \tan ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰-۶۰) = -\tan ۶۰$$

$$\boxed{m_{d_1} = -\sqrt{۳} \simeq -۱/۷}$$

$$d_2 \text{ شیب} = \tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰-۴۵) = -\tan ۴۵$$

$$\boxed{m_{d_2} = -۱}$$

$$d_3 \text{ شیب} = \tan ۱۵۰^\circ = \tan(۱۸۰-۳۰) = -\tan ۳۰$$

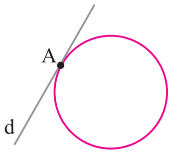
$$\boxed{m_{d_3} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \simeq -۰/۶}$$

همان‌طور که می‌بینید داریم: $m_{d_1} < m_{d_2} < m_{d_3}$

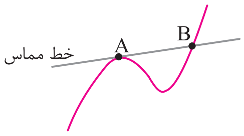
یعنی از ۹۰° به سمت ۱۸۰° از لحاظ عددی و با در نظر گرفتن علامت منفی، باز هم مقدار شیب زیاد می‌شود امّا از لحاظ شهودی و آنچه که به چشم می‌بینیم شیب خط در حال کمتر شدن است یعنی خط از حالت شدیداً مایل به سمت افقی شدن می‌رود در واقع قدرمطلق عدد شیب در حال کمتر شدن است.

شیب خط مماس، مفهوم هندسی مشتق (تعریف مشتق):

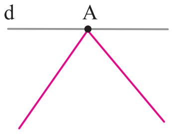
در هندسه و در مبحث دایره، خط مماس را این‌گونه تعریف می‌کنیم که: «خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارد».



این تعریف، نمی‌تواند در این‌جا و در بحث منحنی‌ها مورد قبول باشد زیرا: اوّلاً: می‌توان مماسی بر منحنی رسم کرد که بیش از یک نقطهٔ اشتراک با آن داشته باشد (مانند شکل روبه‌رو).



ثانیاً: خطوطی وجود دارند که با منحنی فقط یک نقطهٔ مشترک دارند ولی مماس به حساب نمی‌آیند (مانند شکل مقابل).



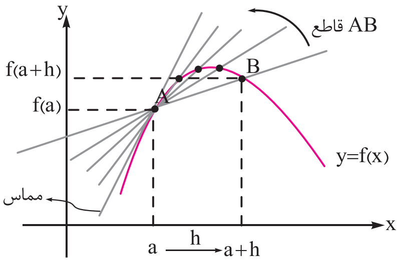
پس باید تعریف بهتری از خط مماس ارائه دهیم، ضمن این که حتماً باید در این تعریف، پای حد در میان باشد وگرنه چرا ما باید حد را قبل از مشتق می‌خواندیم؟!

تعریف دقیق خط مماس: خط مماس، همان حالت حدی خط قاطع است: بری روشن شدن این عبارت به مطالب زیر دقّت کنید:

فرض کنید می‌خواهیم بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ای به طول a مماس رسم کنیم بدین منظور:

۱) نموّ یا رشدی دلخواه به اندازهٔ h به a می‌دهیم تا به نقطهٔ $a+h$ روی محور x ها برسیم.

۲) از نقطهٔ $a+h$ عمودی اخراج می‌کنیم تا منحنی را در نقطه‌ای مانند B قطع کند و از A به B وصل می‌کنیم.



۳) شیب قاطع AB را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شیب قاطع } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \to AB \text{ شیب} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-(a)} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۴) اکنون از حد کمک می‌گیریم و h را به صفر میل می‌دهیم، در نتیجه با نزدیک شدن نقطه $a+h$ روی محور طول‌ها به نقطهٔ a، نقطهٔ B نیز روی منحنی به A نزدیک می‌شود و قاطع AB شروع به دوران حول نقطهٔ A می‌نماید.

۵) در حد وقتی خیلی خیلی h به صفر نزدیک می‌شود، نقطهٔ B نیز بر نقطهٔ A منطبق می‌گردد و قاطع AB تبدیل به مماس در A می‌شود و داریم:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$$

و این رابطه، همان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول a است.

مثال ۱ *اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.* *(نهایی ریاضی ۳ ـ دی ۱۳۹۷)*

پاسخ: از فرمول تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-2(-1+h)^2)-(1-2(-1)^2)}{h}$$

$$\to f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(1-2(1+h^2-2h)\right)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-2-2h^2+4h+1}{h}$$

$$\to f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-2h+4)}{\cancel{h}}=4\to\boxed{f'(-1)=4}$$

مثال ۲ *معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.* *(کار در کلاس صفحه ۷۲)*

پاسخ: ابتدا با استفاده از تعریف مشتق باید شیب خط مماس را بیابیم زیرا دیدیم که:

مشتق تابع f به‌ازای a = شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((-2+h)^2+3\right)-\left((-2)^2+3\right)}{h}$$

$$\to f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h^2-4h+3)-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h-4)}{\cancel{h}}$$

$\to f'(-2)=-4 \leftarrow$ شیب خط مماس

حال برای نوشتن معادلهٔ خط مماس از فرمول کلی نوشتن معادلهٔ خط استفاده می‌کنیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\to y-f(-2)=f'(-2)\left(x-(-2)\right)\to$$

$y-7=-4(x+2)\to\boxed{y=-4x-1}\leftarrow$ معادلهٔ خط مماس

محاسبهٔ $f'(a)$ به روش دیگر:

با رابطهٔ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ برای محاسبهٔ مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول a آشنا شدیم، حال اگر از تغییر متغیر $a+h=x$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$a+h=x\to h=x-a\Rightarrow\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\quad (*)$$

اکثراً استفاده از رابطهٔ (*) برای تعریف مشتق، عملیات کمتری از فرمول قبلی به همراه دارد.

مثال ۳ *مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ به‌دست آورید.* *(نهایی ریاضی ۳ ـ خرداد ۹۸)*

پاسخ:

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-2)-\left((-1)^3-2\right)}{x+1}$$

$$\to f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=3$$

۴ سؤالات امتحانی درس اول

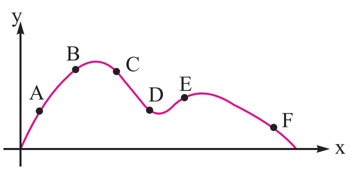
با توجّه به نمودار زیر درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. *(قسمتی از تمرین ۷ صفحه ۷۶ کتاب درسی)*

۱. شیب منحنی در تمام نقاط مشخص شده مثبت است. درست ☐ نادرست ☐

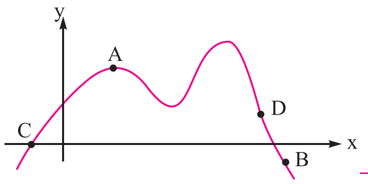
۲. $m_A<m_B$ ($m_A=$ شیب مماس در A) درست ☐ نادرست ☐

۳. شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است. درست ☐ نادرست ☐

۴. $m_F<m_D<m_C$. درست ☐ نادرست ☐



با توجّه به نمودار زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. *(قسمتی از تمرین ۵ صفحه ۷۶ کتاب درسی با کمی تغییر)*



۵. نقطهٔ .... نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن صفر است.

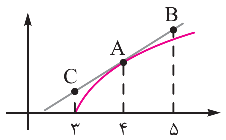
۶. نقطهٔ .... نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

۷. C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا .... است ولی مقدار مشتق در آن .... است.

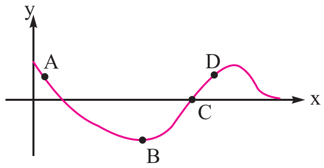
۸. D نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا .... ولی مقدار مشتق .... است.

به سؤالات زیر پاسخ کامل بدهید.

۹. برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$ با توجّه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.
(نهایی ریاضی ـ دی ۱۳۹۷ و تمرین ۸ صفحه ۷۶ کتاب درسی)



۱۰. نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. *(نهایی ریاضی ۳ شهریور ۹۸)*



شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-2
نقطه				

۱۱. اگر $f(x)=3x^2-2x+1$ ، $f'(1)$ را به‌دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن بنویسید.
(تمرین ۱ صفحه ۷۵ کتاب درسی با کمی تغییر)

درس ۲ (مشتق‌پذیری و پیوستگی)

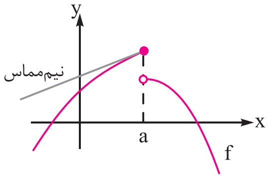
برای بیان رابطهٔ مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ای به طول a و پیوستگی آن در این نقطه، می‌توانیم، ۳ گزارهٔ زیر را مطرح کنیم:

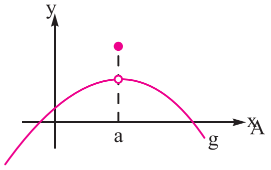
۱) اگر تابع f در a پیوسته نباشد آنگاه f در a مشتق‌پذیر هم نیست.

۲) اگر f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه حتماً f در a پیوسته هم بوده است.

۳) اگر f در a پیوسته باشد آنگاه ممکن است f در a مشتق‌پذیر باشد، همین‌طور ممکن است f در a مشتق‌پذیر نباشد.

← برای توضیح بند (۱) کافی است به خاطر آوریم که مفهوم مشتق تابع در نقطهٔ a از نظر هندسی، همان شیب خط مماس بود، معلوم است که اگر f در a پیوسته نباشد، نمی‌توان یک مماس کامل بر منحنی f در a رسم کرد. (به نمودارهای زیر دقّت کنید)





در شکل سمت راست بالا، اصلاً نمی‌توان بر نمودار تابع g در نقطهٔ a مماسی رسم کرد چون نقطهٔ a در نمودار توخالی (حفره) است و در شکل سمت چپ بالا فقط می‌توان یک نیم‌مماس بر منحنی f در سمت چپ نقطهٔ a رسم نمود، پس وقتی f در a پیوسته نباشد، قطعاً f در a مشتق‌پذیر هم نیست.

← بند (۲) نیز یک قضیهٔ منطقی است که در صفحهٔ ۷۸ کتاب درسی اثبات شده است.

← امّا در مورد بند (۳) ممکن است ابهام بیشتری وجود داشته باشد برای همین، دسته‌بندی زیر به فهم بهتر مطلب کمک می‌کند:

دسته‌بندی نقاط پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر:

۱) نقاط گوشه‌ای:

ابتدا به مثال زیر و پاسخ آن توجّه کنید:

مثال ۴ *مشتق‌پذیری تابع* $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ *را در نقطهٔ* $x=۲$ *بررسی کنید.*

پاسخ: این تابع روی تمام اعداد حقیقی پیوسته است (زیرا عبارت داخل قدرمطلق یک چندجمله‌ای است) پس در $x=۲$ هم پیوسته می‌باشد.

برای محاسبهٔ مشتق تابع، از رابطهٔ تعریف مشتق که قبلاً دیدیم استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left|x^{۲}-۴\right|-۰}{x-۲}$$

از آن‌جا که $x=۲$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق است باید حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم:

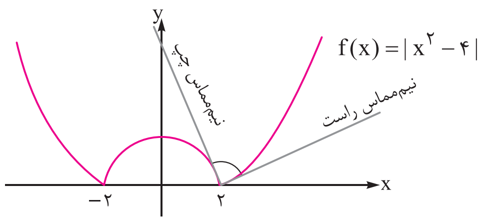
$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\left|x^{۲}-۴\right|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\overset{\oplus}{\left|x-۲\right|}\,\overset{\oplus}{\left|x+۲\right|}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}}=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{\left|x^{۲}-۴\right|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{\overset{(-)}{\left|x-۲\right|}\,\overset{\oplus}{\left|x+۲\right|}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}}=-۴$$

همان‌طور که می‌بینیم، جواب مشتق تابع f، دو عدد مختلف شده است، عدد ۴، مشتق راست f و عدد ۴- مشتق چپ f در $x=۲$ محسوب می‌شوند و چون با هم برابر نیستند تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست. این مطلب به زبان ریاضی به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$f'_{+}(۲)\neq f'_{-}(۲)\rightarrow$ در ۲ مشتق‌ناپذیر است f

برای درک بهتر پاسخ مثال ۴، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم، در نقطهٔ $x=۲$، نمی‌توان یک مماس کامل (غیر عمودی) بر منحنی f رسم کرد، بلکه بر هر کدام از شاخه‌های سمت راستی و سمت چپی یک نیم‌مماس رسم می‌شود که با یکدیگر در نقطهٔ $x=۲$ زاویهٔ α را می‌سازند به همین دلیل به نقطهٔ $x=۲$ نقطهٔ گوشه‌ای یا نقطهٔ زاویه‌دار تابع f می‌گوئیم و آنچه که به عنوان مشتق راست و مشتق چپ پیدا کردیم از دیدگاه هندسی، شیب نیم‌مماس راست و شیب نیم‌مماس چپ در $x=۲$ بودند.

تعریف نقطهٔ گوشه‌ای: نقطه‌ای به طول a را یک نقطهٔ گوشه‌ای برای منحنی f می‌دانیم هرگاه:

اوّلاً: f در a پیوسته باشد.

ثانیاً: مشتق‌های چپ و راست f در a برابر نباشند.

ثالثاً: حداقل یکی از مشتق‌های چپ یا راست در a مقدار متناهی (عددی) داشته باشند (یعنی یا هر دو تا عدد باشند یا یکی عدد و دیگری بی‌نهایت باشد).

نکته به‌طور کلی ریشه‌های سادهٔ عبارات داخل قدرمطلق، جزء نقاط گوشه‌ای اند. در مثال (۴) داریم:

نقاط گوشه‌ای $\leftarrow x^{۲}-۴=۰\rightarrow x=\pm ۲$

۲) نقاط با مماس عمودی: به مثال زیر توجّه کنید:

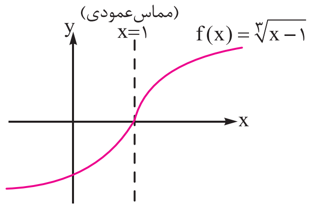
مثال ۵ *مشتق‌پذیری تابع* $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ *را در نقطهٔ* $x=۱$ *بررسی کنید.*

پاسخ: تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس در نقطهٔ $x=۱$ نیز پیوسته می‌باشد از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}}}=\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{(x-۱)^{۳}}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}}\begin{cases}\underset{x\to ۱^{+}}{\dfrac{۱}{۰^{+}}}=+\infty\\ \underset{x\to ۱^{-}}{\dfrac{۱}{۰^{+}}}=+\infty\end{cases}$$

چون مشتق تابع f در $x=۱$، مقداری معین نیست (بی‌نهایت است) f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

برای بهتر فهمیدن مطلب به نمودار تابع f توجّه کنید:



همان‌طور که می‌بینیم در نقطهٔ $x=۱$، یک مماس عمودی بر نمودار f رسم می‌شود، برای همین این نقطه را یک نقطه با مماس عمودی برای منحنی f می‌نامیم.

تعریف نقطهٔ با مماس قائم: نقطه‌ای به طول a را یک نقطه با «مماس قائم» برای منحنی f می‌نامیم هرگاه:

اوّلاً: f در a پیوسته باشد. ثانیاً: مشتق‌های چپ و راست f در a نامتناهی (بی‌نهایت) شوند.

تابع مشتق:

حتماً به خاطر دارید که برای مشخّص کردن یک تابع، معرفی دو موضوع ضرورت دارد: ۱) ضابطهٔ تابع ۲) دامنهٔ تابع

در مورد تابع مشتق نیز این مسأله صادق است، ضابطهٔ تابع با تعریف مشتق و از طریق رابطهٔ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ به‌دست می‌آید. برای یافتن دامنهٔ f'، ابتدا باید دامنهٔ f را مبنای کار قرار دهیم، سپس مجموعهٔ نقاطی از D_f که f' در آنها وجود دارد را مشخّص کنیم تا $D_{f'}$ معلوم شود یعنی همواره داریم: $\boxed{D_{f'}\subseteq D_f}$

مثال ۶ اگر $f(x)=\begin{cases}5x & , \ x\neq 1\\ 2 & , \ x=1\end{cases}$ دامنهٔ f و دامنهٔ f' را محاسبه کنید و ضابطهٔ f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

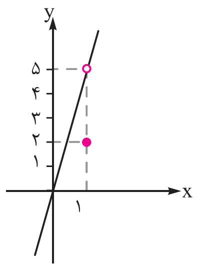
(کار در کلاس صفحه ۸۴ کتاب درسی)

پاسخ: دامنهٔ تابع چند ضابطه‌ای f از اجتماع دامنهٔ ضابطه‌هایش به‌دست می‌آید پس داریم: $D_f=(x\neq 1)\cup(x=1)\to D_f=\mathbb{R}$

از طرفی f در $x=1$ ناپیوسته است:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(5x)=5\\ f(1)=2\end{cases}$$

پس f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و این یعنی $x=1$ در دامنهٔ f' حضور ندارد: $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$



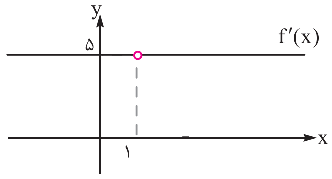
برای یافتن تابع مشتق، از فرمول تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\to f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)-5x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{5x}+5h-\cancel{5x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h}$$

$$\to f'(x)=5 \ , \ x\neq 1$$

حال به کمک ضابطهٔ f' نمودار f' را رسم می‌کنیم:



محاسبهٔ تابع مشتق برخی توابع:

دیدیم که محاسبهٔ مشتق توابع به کمک تعریف، کاری نسبتاً دشوار و زمان‌بر است لذا برای توابعی که در دبیرستان بیشتر با آنها سروکار داریم، ضابطهٔ تابع مشتق را به کمک تعریف محاسبه کرده و پاسخ ساده شده را در جدولی همراه با یک مثال برای هر کدام در زیر آورده‌ایم تا در صورت نیاز فرمول‌های مشتق‌گیری را یکجا داشته باشید.

ردیف	ضابطهٔ تابع $y=f(x)$	ضابطهٔ تابع مشتق $y'=f'(x)$	مثال
۱	$f(x)=c$	$f'(x)=0$	مشتق عدد ثابت صفر است $y=15\to y'=0$
۲	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$y=x^5\to y=5x^4$
۳	$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$	$y=x^5+x^3-12\to y'=5x^4+3x^2-0$
۴	$f(x)=kg(x)$	$f'(x)=k\cdot g'(x)$	$y=17x^2\to y'=17\times 2x=34x$
۵	$y=f(x)\cdot g(x)$	$y'=f'g+g'f$	$y=(x^2+2x)(17x-7)\to y'=(2x+2)(17x-7)+17(x^2+2x)$
۶	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$	$y=\frac{x+3}{x^3+2x}\to y'=\frac{(1)(x^3+2x)-(3x^2+2)\times(x+3)}{(x^3+2x)^2}$
۷	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y=\sqrt{x^3+x^2}\to y'=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$
۸	$y=\sqrt[3]{f(x)}$	$y'=\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{(f(x))^2}}$	$y=\sqrt[3]{x}\to y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
۹*	$y=(f(x))^n$	$y'=n(f(x))^{n-1}f'(x)$	$y=(x^2+4x-1)^{10}$ $y'=10(x^2+4x-1)^9(2x+4)$

* **قاعدهٔ مشتق‌گیری شمارهٔ (۹):** در کتاب درسی به کمک مشتق تابع مرکب گفته شده ولی استفاده از فرمول (۹) در امتحانات نهایی مجاز می‌باشد.

مثال ۷ **مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست)** *(نهایی ریاضی ۳ ـ دی ۱۳۹۷)*

الف) $f(x)=\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۵}$

ب) $g(x)=x^{۲}\left(\sqrt{x}+۱\right)$

پاسخ: الف) در این‌گونه مسائل، تشخیص قالب اصلیِ تابع مهمترین مطلب است. مثلاً در قسمت (الف) قالب اصلی ضابطهٔ تابع، توان داشتن یک عبارت است که به ما می‌فهماند باید از فرمول شمارهٔ (۹) استفاده کنیم:

الف) $f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)'$

در هر قسمت از مسأله که با قالب جدیدی روبه‌رو می‌شویم، با گذاشتن علامت پریم (′) می‌توانیم مشتق‌گیری کامل را به راه حل بعدی موکول کنیم تا دچار اشتباه نشویم.

قالب قسمت باقیمانده کسری است پس از فرمول ۶ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{(۱)(۲x-۱)-(۲)(x)}{(۲x-۱)^{۲}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=۵\left(\frac{x}{۲x-۱}\right)^{۴}\left(\frac{-۱}{(۲x-۱)^{۲}}\right)$$

ب) قالب اصلی ضابطهٔ تابع $g(x)$، حاصل‌ضرب است پس از فرمول (۵) سود می‌بریم:

$$g'(x)=(۲x)\left(\sqrt{x}+۱\right)+\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}+۱}\right)(x^{۲})$$

مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری): اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند آنگاه تابع مرکب fog نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{y=(fog)(x)\rightarrow y'=g'(x)\cdot f'\left(g(x)\right)}$$

به این رابطه، قاعدهٔ مشتق‌گیری از **درون به برون** هم می‌گویند. اغلب وقتی در پرانتز جلوی تابع (ورودی تابع) به جای x تابعی از x قرار می‌گیرد برای مشتق‌گیری باید به یاد این رابطه بیفتیم.

مثال ۸ *اگر $f(x)=g(۵x^{۲}-۴x)$ و $g'(۱)=۳$ آنگاه مقدار عددی $f'(۱)$ را حساب کنید.*

پاسخ: همان‌طور که می‌بینیم در پرانتز ورودی تابع $g(x)$ به جای ورودی سادهٔ x، عبارت $۵x^{۲}-۴x$ نشسته است پس باید از قاعدهٔ زنجیری برای مشتق‌گیری استفاده کنیم:

$$f'(x)=\underbrace{(۱۰x-۴)}_{\text{مشتق درون}}\cdot\underbrace{g'(۵x^{۲}-۴x)}_{\text{مشتق بیرون}}\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۶\cdot g'(۱)\xrightarrow{g'(۱)=۳}f'(۱)=۱۸$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه:

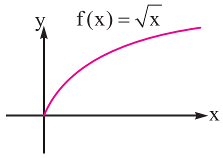
مشتق‌پذیری روی بازهٔ $[a,b]$ مانند پیوستگی روی بازهٔ $[a,b]$ تعریف می‌شود بدین صورت که تابع f را روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه:

اوّلاً: f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد (یعنی در هر نقطهٔ داخلی از بازه، دارای مشتق معیّن باشد مثلاً نقطهٔ ناپیوستگی یا گوشه‌ای نداشته باشد).

ثانیاً: در نقطهٔ a دارای مشتق راست معیّن و در نقطهٔ b دارای مشتق چپ باشد.

مثال ۹ *مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۰,۴]$ بررسی کنید.*

پاسخ: با توجّه به نمودار، تابع f روی بازهٔ $(۰,۴)$ مشتق‌پذیر است و مشکلی ندارد از طرفی ضابطهٔ تابع مشتق f به‌صورت $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ می‌باشد و داریم: $f'_{+}(۰)=+\infty$ پس تابع f در بازهٔ $[۰,۴]$ مشتق‌پذیر نیست.



مشتق مرتبهٔ دوم: اگر تابع مشتقِ f (یعنی f') خود تابعی مشتق‌پذیر باشد مشتق مرتبهٔ دوم f را با f'' نمایش می‌دهیم و برای یافتن آن باید از f' مشتق بگیریم. (البته می‌توان همین‌طور مشتق‌گیری را ادامه داد و مشتقات مرتبه سوم و بالاتر را نیز به‌دست آورد امّا بحث مشتقات متوالی در برنامهٔ کتاب درسی نیست)

مثال ۱۰ *اگر $f(x)=۵x^{۳}-۴x^{۲}-۳x$، مقدار $f''(-۱)$ را به‌دست آورید.* *(تمرین ۱۵ صفحه ۹۲ کتاب درسی)*

پاسخ:

$$f'(x)=۱۵x^{۲}-۸x-۳\rightarrow f''(x)=۳۰x-۸$$

$$\xrightarrow{x=-۱}f''(-۱)=۳۰(-۱)-۸=-۳۸$$

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخّص کنید.

۱۲. نقطهٔ $x=1$ یک نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع $f(x)=(x-1)\left|x^2-1\right|$ است. درست ☐ نادرست ☐

۱۳. تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق ندارد ولی مماس دارد. درست ☐ نادرست ☐

۱۴. اگر دو تابع دارای تابع‌های مشتق یکسانی باشند خود نیز با هم همواره مساوی خواهند شد. درست ☐ نادرست ☐

۱۵. نمودار تابع مشتق تابع $y=\frac{1}{3}x^3$ همواره بالای محور x ها یا بر آن مماس است. درست ☐ نادرست ☐

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۶. مشتق دوم تابع $y=3x^4+2x^2-1$ به‌ازای $x=1$ برابر با .... است.

۱۷. نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطهٔ $x=1$ دارای یک مماس .... است. (افقی / عمودی)

۱۸. تابع $y=\sqrt{x}$ روی بازهٔ .... مشتق‌پذیر است.

۱۹. اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته .... (هست / نیست)

به پرسش‌های زیر پاسخ کامل بدهید.

۲۰. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست). *(نهایی ریاضی ۳ ـ دی ۱۳۹۷)*

الف) $f(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$

ب) $g(x)=x^2\left(\sqrt{x}+1\right)$

۲۱. تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , \quad x<0\\ x^2-1 & , \quad x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید: *(نهایی ریاضی ۳ ـ خرداد ۹۸)*

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۲۲. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست). *(نهایی ریاضی ۳ ـ خرداد ۹۸)*

الف) $f(x)=(x^4-3x)^5$

ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}$

۲۳. معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=\frac{2x}{x-1}$ را در نقطهٔ $(2,4)$ بنویسید. *(نهایی حسابان ـ خرداد ۹۷)*

۲۴. اگر $f(x)=g(5x^2-4x)$ و $g'(1)=3$ باشد آنگاه مقدار عددی $f'(1)$ را حساب کنید.

۲۵. نقطه‌ای واقع بر نمودار $y=-4x^2+16x+1$ پیدا کنید به‌طوری‌که خط مماس بر نمودار تابع، موازی محور طول‌ها باشد. *(نهایی حسابان ـ خرداد ۹۶)*

درس ۳ (آهنگ تغییر)

در فیزیک، مشتق را آهنگ تغییر می‌نامند. درواقع آنچه که ما به عنوان سرعت در فیزیک می‌شناسیم چیزی نیست جز، چگونگی تغییر مسافت، همین‌طور شتاب یعنی نحوهٔ تغییر سرعت و....

در این درس آهنگ تغییر را در دو قسمت مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱) **آهنگ متوسط (میانگین) تغییر:** آهنگ متوسط تغییرات تابع f در بازهٔ $[x_1,x_2]$ (از نقطهٔ x_1 تا نقطهٔ x_2) می‌شود:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

(مانند سرعت متوسط در فیزیک)