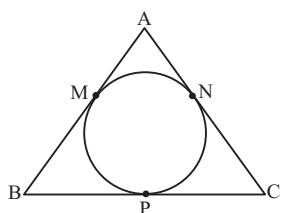
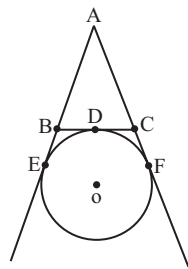
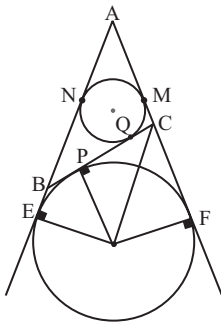


# درس چندضلعی‌های محاطی و محیطی

## سوالات امتحانی درس سوم

<b>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</b>	
۶۰ یک چندضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر همه نیم‌سازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست
۶۱ یک دوزنقه متساوی‌الساقین، محاطی و محیطی است.	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست
۶۲ شعاع دایره محاطی خارجی رأس A از مثلث ABC برابر با $r_a = \frac{S}{P-a}$ (P نصف محیط و S مساحت) است.	<input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست
<b>جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.</b>	
۶۳ در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P، شعاع دایره محاطی برابر با ..... است.	۶۴ یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر .....
۶۵ یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر .....	۶۶ در مثلث ABC با اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷، طول شعاع دایره محاطی خارجی بزرگ‌ترین ضلع کدام گزینه است؟
۶۷ در چهارضلعی محیطی ABCD، AB، BC و CD به ترتیب ۸ و ۱۲ و ۲۵ می‌باشند. طول AD کدام گزینه است؟	۶۸ اگر یک متوازی‌الاضلاع، هم محاطی و هم محیطی باشد، به کدام شکل تبدیل می‌شود؟
۱۲/۵ (۱)	۴ (۲)
۲۱ (۳)	۲۰ (۲)
۲۸ (۴)	۲۲ (۳)
۱۸ (۴)	۲ (مربع)
۳ (لوزی)	۴ (دوزنقه متساوی‌الساقین)
<b>به سوالات زیر پاسخ دهید.</b>	
۶۹ اگر در یک n ضلعی محیطی، مساحت را با S و محیط را با ۲P نمایش دهیم، ثابت کنید که اندازه شعاع دایره محاطی برابر است با: $r = \frac{S}{P}$	۷۰ ثابت کنید در مثلث ABC، رأس A و مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و مرکز دایره محاطی خارجی ضلع BC، بر روی یک خط راست قرار دارند.
۷۱ در مثلث ABC، اگر $r_a$ ، $r_b$ و $r_c$ شعاع دایره‌های محاطی خارجی رأس A، B، C باشند، ثابت کنید:	۷۲ در مثلث ABC، شعاع دایره محاطی مثلث ABC رسم شده است. ثابت کنید:
$r_a = \frac{S}{P-a}$ ، $r_b = \frac{S}{P-b}$ ، $r_c = \frac{S}{P-c}$	P: نصف محیط مثلث S: مساحت مثلث
	$\begin{cases} CN = CP = P - c \\ BP = BM = P - b \\ AM = AN = P - a \end{cases}$ P نصف محیط است.
	۷۳ خط‌های AF، AE، BC به ترتیب در نقاط F، E، D بر دایره مماس هستند. مماس BC، خط‌های AE و AF را به ترتیب در نقاط B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره بین دو نقطه ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.
۷۴ مثلث ABC با اضلاع $BC = 13$ ، $AC = 12$ و $AB = 5$ مفروض است. الف. طول شعاع دایره محاطی داخلی آن را حساب کنید. ب. طول شعاع دایره‌های محاطی خارجی رأس‌های A، B، C را حساب کنید.	

۷۵ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع  $2\sqrt{3}$ ، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی را محاسبه کنید.



۷۶ مطابق شکل، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی رأس A رسم شده‌اند. ثابت کنید:

الف.  $AE = AF = P$  (P نصف محیط مثلث ABC)

ب.  $\begin{cases} CP = CF = P - AC \\ BE = BP = P - AB \end{cases}$

۷۷ با استفاده از سؤال قبل، ثابت کنید:

الف. طول مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رأس A برابر است با:

$$PQ = |AC - AB|$$

ب. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رأس A برابر است با:

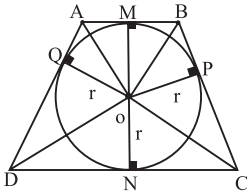
$$MF = BC$$

پ. طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رأس B، به ترتیب برابر است با:  $|AB - BC|$  و AC.

ت. طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رأس C، به ترتیب برابر است با:  $|AC - BC|$  و AB.

۷۸ با استفاده از نکات سؤال قبل، ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی، دوه‌دو بر هم مماس هستند.

۷۹ در مثلثی به اضلاع  $AB = 4$ ،  $AC = 6$  و  $BC = 8$ ، طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی رأس A را حساب کنید.



۸۰ مطابق شکل، دوزنقهٔ ABCD بر دایره به شعاع r محیط شده است.

الف. با توجه به این‌که نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی دوزنقه و محل هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای داخلی آن است، ثابت کنید مثلث‌های

AOM و BOM هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید که  $AM = BM = \frac{AB}{2}$ .

به همین ترتیب ثابت کنید مثلث‌های DON و CON هم‌نهشت هستند و نتیجه بگیرید:  $DN = CN = \frac{DC}{2}$ .

ب. با توجه به قسمت (الف) و این نکته که مماس‌های رسم‌شده بر دایره از نقطه‌ای خارج آن، باهم برابرند، ثابت کنید:

$$AD = BC = \frac{AB + CD}{2}$$

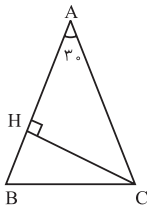
۸۱ در سؤال قبل، با توجه به این‌که OB و OC نیم‌ساز زوایای B و C هستند:

الف. در مثلث BOC، ثابت کنید:  $\hat{B}OC = 90^\circ$ .

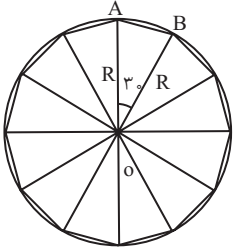
ب. با نوشتن تشابه مثلث‌ها در مثلث  $(\hat{B}OC = \hat{P} = 90^\circ)$  ثابت کنید:

$$AB \times CD = 4r^2$$

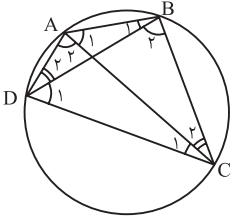
۸۲ الف. مطابق شکل در مثلث ABC،  $AB = AC = R$  و  $\hat{A} = 30^\circ$  می‌باشد. با محاسبهٔ طول ارتفاع CH، مساحت مثلث ABC را بر حسب R حساب کنید.



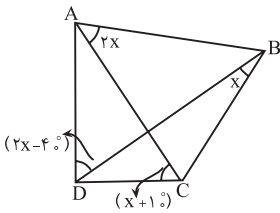
ب. با استفاده از نکته قسمت (الف)، مساحت دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R را بر حسب R حساب کنید.



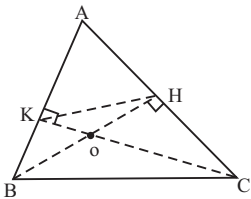
۸۳ الف. مطابق شکل ثابت کنید، در هر چهارضلعی محاطی، زوایای روبه‌رو به یک ضلع باهم برابرند.



ب. مطابق شکل چهارضلعی ABCD محاطی است. اندازه زاویه x را بیابید.



۸۴ مطابق شکل، ارتفاع‌های BH و CK رسم شده‌اند. چرا چهارضلعی‌های AKOH و BKHC محاطی هستند؟



## پاسخ

۶۰ درست

$$\text{طول شعاع دایره محاطی خارجی وتر BC} = \frac{S}{P - BC}$$

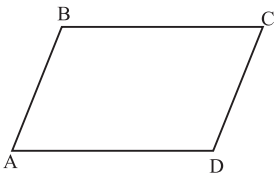
$$= \frac{۸۴}{۲۸ - ۲۵} = \frac{۸۴}{۳} = ۲۸$$

۶۷ گزینه «۱» در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو، برابرند:

$$AB + CD = BC + AD$$

$$\Rightarrow ۸ + ۲۵ = ۱۲ + AD \Rightarrow AD = ۲۱$$

۶۸ گزینه «۲»



$$\text{محیطی } ABCD \Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow ۲AB = ۲BC$$

$$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow AB = BC = CD = AD \quad (۱)$$

$$\text{محاطی } ABCD \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ, \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\hat{A} = ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ, ۲\hat{B} = ۲\hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که متوازی‌الاضلاع ABCD به مربع تبدیل می‌شود.

۶۱ نادرست، شرط محاطی بودن این است که مجموع زوایای روبه‌رو، دوجه‌دو  $۱۸۰^\circ$  باشد و همچنین شرط محیطی بودن این است که مجموع اضلاع روبه‌رو، دوجه‌دو مساوی باشند. دوزنقه متساوی‌الساقین، شرط محیطی بودن را ندارد.

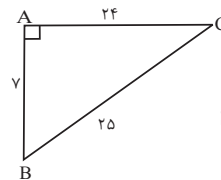
۶۲ درست

$$۶۳ \quad r = \frac{S}{P}$$

۶۴ مجموع دو زاویه روبه‌روی آن  $۱۸۰^\circ$  باشد.

۶۵ مجموع اضلاع روبه‌روی آن، دو به دو، مساوی باشد (یا نیم‌سازهای زوایای داخلی آن در یک نقطه هم‌رس باشند).

۶۶ گزینه «۴»



از آن‌جاکه  $۲۵^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲$ ، پس مثلث قائم‌الزاویه است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times ۷ \times ۲۴ = ۸۴$$

$$P = \frac{۷ + ۲۴ + ۲۵}{۲} = ۲۸$$