



فصل دوم: عددهای حقیقی

• درسنامه •

[درسنامه عددهای گویا]

۱. نوشتن کسر بین دو کسر با کمک مخرج مشترک گرفتن:

هر گاه بخواهیم بین دو کسر مثلاً $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ عدد کسری بنویسیم باید مخرج مشترک بگیریم:

اما بین $\frac{3}{12}$ و $\frac{4}{12}$ اگر بخواهیم کسر بنویسیم باید بینیم که چند کسر می‌خواهیم بین این دو کسر بنویسیم.

مثلاً اگر قرار باشد یک کسر بین آن‌ها بنویسیم باید همهٔ صورت‌ها و مخرج‌ها را در ۲ ضرب کنیم (یعنی یکی بیشتر از یک)

$$\frac{3 \times 2}{12 \times 2} < ? < \frac{4 \times 2}{12 \times 2}$$

$$\frac{6}{24} < \frac{7}{24} < \frac{8}{24}$$

$$\frac{3 \times 3}{12 \times 3} < ? < \frac{4 \times 3}{12 \times 3}$$

$$\frac{9}{36} < \frac{10}{36} < \frac{11}{36} < \frac{12}{36}$$

$$\frac{1}{7} < ? < \frac{1}{6}$$

$$\frac{6}{42} < ? < \frac{7}{42}$$

$$\frac{6 \times 4}{42 \times 4} < ? < \frac{7 \times 4}{42 \times 4}$$

$$\frac{24}{168} < \frac{25}{168} < \frac{26}{168} < \frac{27}{168} < \frac{28}{168}$$

مثال بین دو کسر $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{7}$ سه کسر بنویسید:

۲. نوشتن کسر بین دو کسر با کمک میانگین گرفتن:

اگر بخواهیم بین دو کسر مثلاً $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{9}$ کسری بنویسیم کافیست که میانگین این دو عدد را حساب کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{10} < ? < \frac{1}{9} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}, \frac{19}{90} \div 2 = \frac{19}{90} \times \frac{1}{2} = \frac{19}{180} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{19}{180} < \frac{1}{9}$$

در ضمن اگر بخواهیم به کمک این روش عدد کسری دیگری هم بین $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{9}$ بنویسیم کافیست بین $\frac{1}{10}$ و $\frac{19}{180}$ یا بین $\frac{19}{180}$ و $\frac{1}{9}$ میانگین بگیریم تا عدد دیگری هم مشخص شود و الی آخر.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \frac{7}{12} \div 2 = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$$

مثال بین دو کسر $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ یک کسر بنویسید.

پاسخ:

۳. مقایسه کسرها:

برای مقایسه کسرها روش‌های مختلفی وجود دارد که می‌توانید از آن‌ها استفاده کنید اما مخرج مشترک گرفتن از رایج‌ترین روش‌هاست.

$$\frac{3 \times (8 \times 5 \times 3)}{4 \times (8 \times 5 \times 3)}, \frac{5 \times (4 \times 5 \times 3)}{8 \times (4 \times 5 \times 3)}, \frac{4 \times (4 \times 8 \times 3)}{5 \times (4 \times 8 \times 3)}, \frac{1 \times (4 \times 8 \times 5)}{3 \times (4 \times 8 \times 5)}$$

$$\frac{360}{480}, \frac{300}{480}, \frac{384}{480}, \frac{160}{480}$$

$$\frac{160}{480} < \frac{300}{480} < \frac{360}{480} < \frac{384}{480}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

مثال کسرهای $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

۴. نمایش اعشاری کسرها:

اگر صورت هر کسر را پس از ساده شدن کسر، بر مخرج آن تقسیم کنیم، می‌توانیم آن کسر را به صورت یک عدد اعشاری بنویسیم؛ برای تبدیل یک کسر به اعشار سه مدل، نمایش اعشاری وجود دارد:

کسرهایی که نمایش اعشاری مختوم دارند	در تقسیم صورت بر مخرج به باقی مانده صفر می‌رسیم.	مخرج این کسرها پس از تجزیه فقط شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ یا هر دو را دارند.	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{19}{20}, \dots$
کسرهایی که نمایشی اعشاری متناوب ساده دارند.	در تقسیم صورت بر مخرج به باقی مانده صفر نمی‌رسیم و در خارج قسمت رقم یا ارقامی بعد از ممیز به طور متناوب تکرار می‌شوند.	مخرج این کسرها پس از تجزیه شمارنده اول غیر از ۲ و ۵ دارند.	$\frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9}, \frac{3}{11}, \frac{5}{13}, \dots$
کسرهایی که نمایش اعشاری متناوب مرکب دارند.	در تقسیم صورت بر مخرج به باقی مانده صفر نمی‌رسیم و در خارج قسمت بعضی ارقام تکرار نمی‌شوند و بعضی ارقام تکرار می‌شوند.	مخرج این کسرها پس از تجزیه هم شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ یا هر دو را دارند و هم شمارنده‌های اول غیر از ۲ و ۵ دارند.	$\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{3}{14}, \frac{4}{15}, \frac{7}{18}, \dots$

مثال هر کسر را به صورت اعشاری بنویسید و نوع آن را مشخص کنید.

پاسخ: چون مخرج کسر بعد از تجزیه فقط شمارنده اول ۲ یا ۵ دارد پس نمایش اعشاری آن مختوم است.

$$\text{(الف)} \quad \frac{18}{75} = \frac{18 \div 3}{75 \div 3} = \frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r} 6/00 \\ \hline 50 \\ \hline 100 \\ \hline 100 \\ \hline 000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \hline 0/24 \\ \hline 25 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{6}{25} = 0/24$$

چون مخرج کسر شمارنده اول ۲ یا ۵ ندارد پس نمایش اعشاری ان متناوب ساده است.

$$\text{(ب)} \quad \frac{2}{3} \quad \begin{array}{r} 2/00 \\ \hline 18 \\ \hline 0/20 \\ \hline 18 \\ \hline 0/2 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} \approx 0/666 = 0/\bar{6}$$

در این مدل نمایش اعشاری به جای تکرار رقمی که چند بار تکرار می‌شود آن را رقم می‌نویسیم و بالای آن یک خط که نشان می‌دهد رقم یا ارقام زیر آن تکرار می‌شوند قرار می‌دهیم:

$$\text{(پ)} \quad \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{r} 7/0000 \\ \hline 6/0 \\ \hline 100 \\ \hline 96 \\ \hline 0/40 \\ \hline 36 \\ \hline 0/4 \\ \hline 24 \\ \hline 0/4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \hline 0/58833 \\ \hline 12 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{7}{12} \approx 0/58333\dots = 0/\bar{58\bar{3}}$$

۵. یادآوری چهار عمل اصلی اعداد گویا:

$\frac{a \pm c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	$\frac{a \times c}{b \times e} = \frac{ac}{be}$
$\frac{a \pm c}{b \times e} = \frac{ae \pm cb}{be}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{e} = \frac{a}{b} \times \frac{e}{c} = \frac{ae}{bc}$

$$(-\frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{-5}{8}) \times (\frac{1}{3} \div (-\frac{4}{3})) =$$

مثال حاصل را به دست آورید:

$$(\frac{-1+3+5}{8}) \times (\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{4})) = \frac{7}{8} \times \frac{-1}{12} = \frac{-49}{96}$$

۶. عایت ترتیب انجام عملیات در ریاضی:

(۲) توان

(۴) جمع و تفریق: هر کدام از سمت چپ زودتر آمده باشند.

(۱) ضرب

(۳) ضرب و تقسیم: هر کدام از سمت چپ زودتر آمده باشند.

مثال حاصل را به دست آورید:

$$\frac{3}{5} - \frac{-2}{-9} \div 4 \times 1\frac{1}{3} + (1 - \frac{2}{3}) =$$

$$\frac{13}{5} - \frac{2}{9} \div 4 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{13}{5} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{5} - \frac{2}{27} + \frac{1}{3} = \frac{351-10}{135} + \frac{1}{3} = \frac{341}{135} + \frac{1}{3} = \frac{1023+135}{405} = \frac{1158}{405}$$

پاسخ:

تمرین

۱. بین دو کسر $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{7}$ سه کسر بنویسید.

۲. بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ یک کسر بنویسید.

۳. کسرهای $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{9}{12}$ را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

۴. نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید.

الف) $\frac{3}{7}$

ب) $\frac{24}{45}$

$$\frac{1}{4} \div \frac{\frac{1}{5} - \left(\frac{-3}{-8}\right) \times 2}{\frac{1}{4} \times \left(-2\frac{1}{3}\right)} =$$

۵. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

[

درسنامه عددهای حقیقی

۷. عدد گنگ (اصم):

اعدادی را که پس از تبدیل به عدد اعشاری، ارقام بعد از ممیز آنها بی شمار است و دارای دورهٔ تناوب نمی‌باشند اعداد گنگ یا اصم می‌گویند.

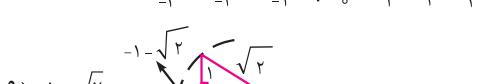
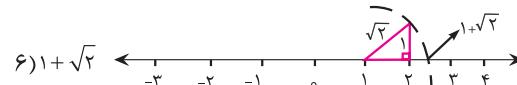
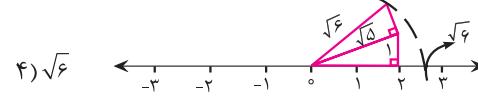
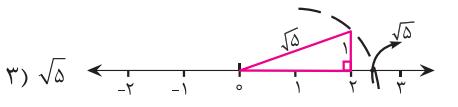
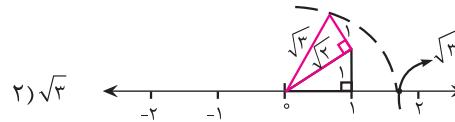
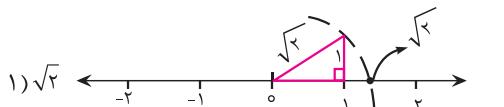
مانند: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$

مجموعهٔ اعداد گنگ را با Q^c یا Q' نمایش می‌دهیم.

مثال درستی یا نادرستی هر یک را مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{7}{5} \in Q' & 2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \in Q & 3) \sqrt{0.09} \notin Q' \\ \boxed{\text{ن}} & \boxed{\text{ن}} & \boxed{\text{د}} \\ \pi \in Q' & 4) \frac{3}{14} \in Q & 5) 0.03509350004\dots \in Q \\ \boxed{\text{د}} & \boxed{\text{ن}} & \boxed{\text{ن}} \end{array}$$

۸. یادآوری نمایش اعداد گنگ، روی محور



۹. نوشتندگ بین دو عدد:

$$5 = \sqrt{25}$$

$$6 = \sqrt{36}$$

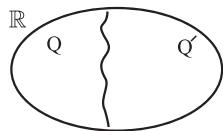
هر گاه بخواهیم بین دو عدد مثل ۵ و ۶ اعداد گنگ بنویسیم کافیست آن اعداد را به صورت رادیکالی بنویسیم:

$$\sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{27} < \sqrt{28} < \sqrt{29} < \sqrt{30} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

اکنون خواهیم داشت: وکلی عدد دیگر حتی در موقعی که عدد رادیکالی بیشتری بخواهیم می توانیم اعداد رادیکالی که مربع کامل نباشند به صورت رو برو هم نوشته باشند:

۱۰. نوشتندگ بین دو عدد گنگ:

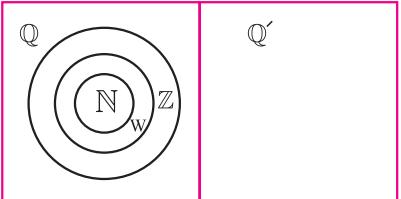
هر گاه بخواهیم بین دو عدد مثل ۶ و $\sqrt{12}$ عدد گنگ بنویسیم به راحتی این کار انجام می شود مانند $\sqrt{11}, \sqrt{10}, \sqrt{8}, \sqrt{7}, \sqrt{6}$ باید دقت کنید که $\sqrt{9}$ را ننوشتیم چون گنگ نیست اما اگر بین این دو عدد تعداد بیشتری عدد گنگ خواست می توانیم اعداد رو برو را نیز بنویسیم:



$$R = Q \cup Q'$$

$-6 \notin R$	$\sqrt{11} \in R$	$-0/75 \in R$
$\pi \notin R$	$-\frac{1}{\sqrt{5}} \in R$	$4 \in R$

R



- ۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$
- ۲) $R = Q \cup Q'$
- ۳) $Q \cap Q' = \emptyset$

۱۲. ارتباط مجموعه های اعداد با یکدیگر:

لتایخ خوداروں مقابل:

۱۳. نمایش مجموعه اعداد حقیقی روی محور:

از آنجائیکه بی شمار عدد حقیقی داریم و نوشتندگ تک تک اعضای آن امکان پذیر نمی باشد بنابراین اعداد حقیقی را روی محور نمایش می دهیم:

مثال هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نمایش دهید:

- ۱) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$
- ۲) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -3\}$
- ۳) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -3\}$
- ۴) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -3\}$
- ۵) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x\}$
- ۶) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x\}$
- ۷) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$
- ۸) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

تمرین

۶. جاهای خالی را با کمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

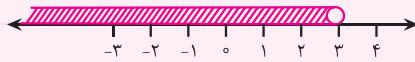
(الف) هر عدد حقیقی که گنگ نباشد است.

(ب) اگر عدد a مربع کامل نباشد، عدد \sqrt{a} یک عدد است.

(پ) تمام عدها به دو دسته عدها و عدهای گنگ دسته بندی می شوند.

۷. مجموعه A را روی محور نمایش دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 6\}$$



۸. مجموعه مقابله با نماد ریاضی بنویسید.
۹. بین دو عدد ۳ و ۴ سه عدد گنگ بنویسید.
۱۰. بین دو عدد $\sqrt{6}$ و ۳ چهار عدد گنگ بنویسید.
۱۱. عدد $-\sqrt{5}-2$ را روی محور نشان دهید.
۱۲. عدد $-\sqrt{2}-4$ بین کدام دو عدد صحیح متواالی قرار دارد؟

درسنامه قد، مطلق و محاسبه تقریبی

۱۴. قد، مطلق:

فاصله هر نقطه روی محور تا مبدأ را قدر مطلق آن نقطه می‌نامیم. که این فاصله همیشه مقداری مثبت است.

یعنی فاصله نقطه ۴ تا مبدأ را می‌توانیم بگوییم قدر مطلق ۴ که می‌شود ۴ و همچنین فاصله نقطه -۴ تا مبدأ را نیز می‌توانیم بگوییم قدر مطلق -۴ که می‌شود ۴ و برای علامت قدر مطلق از «||» استفاده می‌کنیم:

$$|-7| = +7, \quad |+11| = 11, \quad |0| = 0$$

مثال حاصل هر یک را بنویسید.

۱۵. قد، مطلق: a

در قسمت قبل توضیح داده شد که قدر مطلق همواره مقداری مثبت است چون فاصله را بیان می‌کند.

اگر داخل قدر مطلق عدد حقیقی باشد، مقدار مثبت آن بیرون نوشته می‌شود. اما اگر داخل قدر مطلق حروف انگلیسی مانند a باشد (یعنی داخل قدر مطلق عبارت جبری باشد) باید شرایط زیر را بررسی کنیم:

اگر $a = 0$ باشد پس $|a|$ همیشه صفر است.

اگر $a > 0$ باشد پس مقدار $|a|$ حتماً خود a است.

اگر $a < 0$ باشد پس مقدار $|a|$ برابر با قرینه $(-a)$ است.

مثال حاصل $|x+1|$ چند است؟

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$x = -1 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow |x+1| = 0$$

$$x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) = -x-1$$

۱۶. قد، مطلق مقدارهای تقریبی

اگر عدد داخل قدر مطلق عدد دقیقی مانند ۵ یا یک حرف انگلیسی مانند b (عبارت جبری) نبود و عددی مانند $-\sqrt{3}-1$ بود که مقدار دقیق آن را نمی‌دانستیم برای اینکه مقدار قدر مطلق آن را حساب کنیم باید ابتدا مقدار تقریبی آن را معلوم کنیم. چون $\sqrt{3} \approx 1.7$ می‌باشد پس $-\sqrt{3}-1$ مقداری منفی است بنابراین $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3} = \sqrt{3}-1$ قرینه عدد $(1-\sqrt{3})$ از قدر مطلق بیرون می‌آید:

۱۷. قد، مطلق و رادیکال:

مقدار $\sqrt{a^2}$ همواره عددی مثبت است و با قدر مطلق a برابر است:

مثال حاصل هر یک را بنویسید:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{3^2} = |3|^2 = 3, \quad \sqrt{(-8)^2} = |-8| = -(-8) = +8$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$$

تمرین

$$|-6| + |-4+7-3| =$$

$$|-a^2 - 2b| + 3ab =$$

$$|\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-6| + |-3| =$$

$$|12-18 \div 6 \times 3 - 3 \times (-2)| =$$

$$(الف) |5-\sqrt{28}| =$$

$$(ب) \sqrt{(1-\sqrt{8})^2} =$$

۱۳. حاصل عبارت مقابل را بنویسید:

۱۴. اگر $a = -5$ و $b = 10$ باشد آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

۱۵. حاصل را به دست آورید:

۱۶. حاصل را به دست آورید:

۱۷. عبارات مقابل را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید:

آزمون فصل دوم: عددهای حقیقی

۱۵ نمره



۱ <input type="checkbox"/> درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست	درستی یا نادرستی هر یک از جملات یا عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) $\sqrt{49} \in \mathbb{Q}'$ (ب) $N \notin \mathbb{Q}'$ (پ) عددی که هم گویا و هم گنگ باشد وجود ندارد. (ت) اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشند آنگاه حتماً $ab > 0$ است.	۱. جملات یا عبارات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید. (الف) حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آن هاست. (ب) $ 6 - 19 > 9 + \square$ (درجای خالی بزرگترین عدد صحیح ممکن را قرار دهید). (پ) بین دو کسر می‌توان به تعداد کسر پیدا کرد. (ت) کسرهایی که نمایش اعشاری دارند در مخرج آن‌ها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارند.	۲. گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. (الف) کدام کسر بین 0 و $\frac{1}{4}$ نمی‌باشد? $-\frac{1}{3} \quad (4)$ $-\frac{1}{12} \quad (3)$ $-\frac{1}{8} \quad (2)$ $-\frac{1}{4} \quad (1)$ (ب) کدام گزینه درست است? $\frac{3}{5} \notin \mathbb{R} \quad (4)$ $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}' \quad (3)$ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \quad (2)$ $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N} \quad (1)$ (پ) کدام گزینه نشان می‌دهد که «عدد b نامنفی است». $b < 0 \quad (4)$ $b \leq 0 \quad (3)$ $b > 0 \quad (2)$ $b \geq 0 \quad (1)$ (ت) کدام گزینه همواره صحیح است? $ a + b \geq a + b \quad (4)$ $ a + b \leq a + b \quad (3)$ $ a + b = a + b \quad (2)$ $ a + b > a + b \quad (1)$
۰/۵ ۰/۵ ۰/۵	(الف) بین دو عدد ۱ و ۲ دو عدد گنگ بنویسید. (ب) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (ج) مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ را روی محور نشان دهید.	۴.	
۰/۵ ۰/۵	(الف) مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < \frac{3}{5}\}$ را روی محور نمایش دهید. (ب) عدد $-4 - \sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح متواالی قرار دارد؟	۵.	
۰/۵ ۰/۵	(الف) بین دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{11}$ یک عدد گویا و یک عدد گنگ بنویسید. (ب) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.	۶.	
۰/۷۵ ۰/۵	(الف) عبارت زیر را به زبان ریاضی بنویسید. «قدر مطلق تفاضل دو عدد، بزرگتر یا مساوی تفاضل قدر مطلق آن دو عدد است.» (ب) مجموعه مقابل را روی محور نمایش دهید.	۷.	
۰/۵ ۰/۲۵	(الف) به کمک مخرج مشترک گرفتن بین $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ دو کسر بنویسید. (ب) نمایش اعشاری کسر $\frac{5}{9}$ را بنویسید.	۸.	
۰/۵ ۰/۵	(الف) حاصل عبارت روبرو را به دست آورید: $2 - \frac{2}{2 - \frac{1}{2}} =$ (ب) عدد $4 - \sqrt{2}$ را روی محور نمایش دهید.	۹.	
۰/۵	اگر $x = 1 + \sqrt{11}$ و $y = 1 + \sqrt{11} + 10$ باشند آنگاه حاصل $ x - y $ را به دست آورید:	۱۰.	