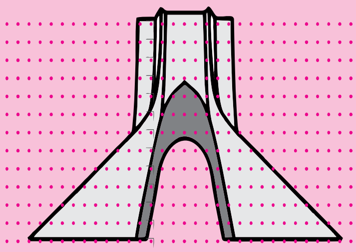
واحد ۴
مساحت و کاربردهای آن

- مساحت چندضلعی‌های محدب
- مساجت چندضلعی‌های منتظم
- نقاط شبکه‌ای

چگونه می‌توان با نقاط شبکه‌ای مشخص شده مساحت برج آزادی را محاسبه کرد؟

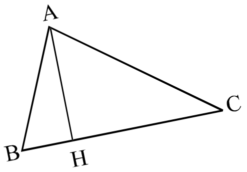


پیش آزمون

۱. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$ اندازه ارتفاع BH برابر ۳ متر و مساحت مثلث برابر $\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$ مترمربع است، ضلع a چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $A = ۹۰^\circ$، اگر $BH = ۲$ و $CH = ۳$ باشد، مساحت مثلث ABH چند برابر مساحت مثلث ACH است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۳. در مثلث قائم‌الزاویه حاصل‌ضرب سه ضلع، k برابر طول ارتفاع وارد بر وتر است، طول وتر کدام است؟

۱) $\frac{k}{۲}$ ۲) $\sqrt{k}$ ۳) $k^۲$ ۴) $k^۳$

۴. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۶۴ سانتی‌مترمربع و واسطه هندسی بین ضلع‌های AB و AC برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد آن‌گاه sin(A) برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۵. در مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت $۸\sqrt{۳}$ طول ارتفاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۶. مجموع فواصل یک نقطه دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر است با ۹. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

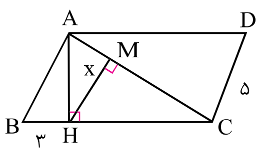
۷. در مثلثی به اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد نقطه M ضلع بزرگ‌تر را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است. مجموع فواصل M از دو ساق این مثلث کدام است؟

۱) ۳/۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) ۵/۴

۸. در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = ۷$، $AC = ۵$ و $BC = ۶$ است. اندازه ارتفاع وارد بر ضلع کوچک این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۶}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل زیر حاصل $x+y$ کدام است اگر مساحت متوازی‌لاضلاع ۲۸ باشد؟



۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۲(۲+\frac{\sqrt{۲}}{۴})$ ۳) $۲+\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰. یک مزرعه مستطیل شکل که عرض آن نصف طولش است، تماماً با x متر نرده محصور شده است. مساحت مزرعه بر حسب x کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۲۴}$ ۲) $\frac{x^۲}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲x^۲}{۹}$ ۴) $\frac{x^۲}{۷۲}$

۱۱. اگر طول یک مستطیل برابر ۶ و زاویه بین دو قطر آن ۶۰° باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

۱۲. در یک لوزی یکی از قطرها دو برابر قطر دیگر است. اگر مساحت این لوزی برابر ۵ باشد، محیط این لوزی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۰}{۴}$

۱۳. در یک مستطیل وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم اگر یکی از زوایای داخلی چهار ضلعی پدید آمده برابر ۶۰° باشد و بدانیم مساحت این چهار ضلعی $۲\sqrt{۳}$ است، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۱۴. یک زاویه ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای ۴۵° است. اگر ارتفاع و قاعده کوچک ذوزنقه هر دو ۶cm باشند، آن‌گاه مساحت ذوزنقه چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۵۰ ۴) ۴۸

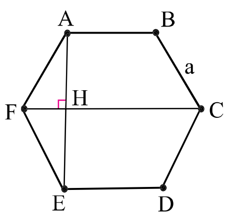
۱۵. در ذوزنقه ABCD، M وسط ساق AB است. اگر $AD = ۳$ و $BC = ۷$ و فاصله A از قاعده BC برابر ۵ باشد، مساحت مثلث MDC کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۱۶. در ذوزنقه ABCD ، $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$، $AD = \sqrt{۳}$ و $AB = ۶$ و فاصله نقطه تلاقی دو قطر از قاعده برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت هاشور خورده چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۶

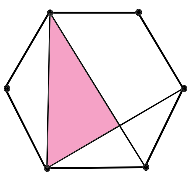
۱۷. در شش ضلعی منتظم به ضلع a حاصل $AE \times FH$ چقدر است؟



۱) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $a^۲\sqrt{۳}$

۳) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$

۱۸. در شش ضلعی منتظم شکل روبه‌رو به ضلع a، مساحت ناحیه سایه خورده کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}a^۲$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}a^۲$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}a^۲$ ۴) $\sqrt{۳}a^۲$

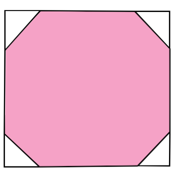
۱۹. در یک ۶ ضلعی منتظم اندازه قطر کوچک ۴ می باشد. اگر وسط‌های اضلاع این ۶ ضلعی را به هم وصل کنیم مساحت ۶ ضلعی به وجود آمده کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

۲۰. یک هشت ضلعی منتظم در یک مربع محاط شده است. اگر ضلع هشت ضلعی $\sqrt{۲}$ باشد ضلع مربع کدام است؟

۱) $۴ + \sqrt{۲}$ ۲) $۱ + \sqrt{۲}$ ۳) $۲ + \sqrt{۲}$ ۴) $۲ + ۲\sqrt{۲}$

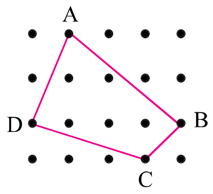
۲۱. در شکل روبه‌رو مساحت مربع ۲ واحد مربع است. مساحت ۸ ضلعی منتظم کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲} - ۴$ ۲) $۸ - ۴\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲} - ۲$ ۴) $۴ - ۲\sqrt{۲}$

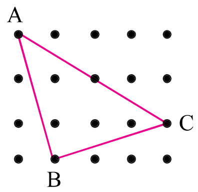
۲۲. در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی برابر ۱ واحد است. مساحت چهار ضلعی ABCD کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۴/۵

۳) ۵ ۴) ۶

۲۳. در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی یک واحد است. طول ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



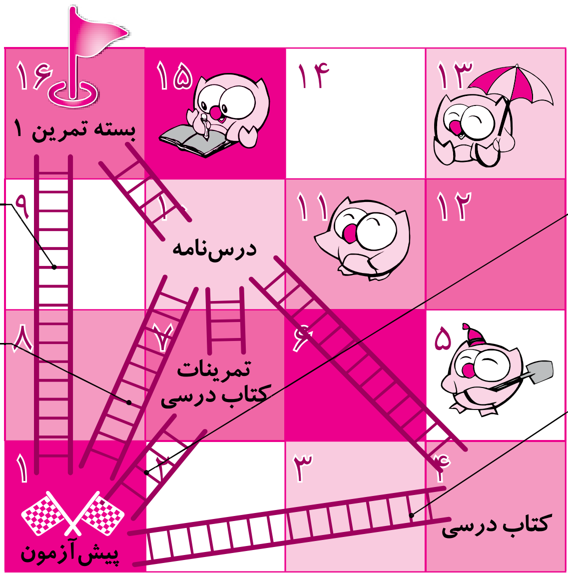
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴
۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴	
۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴	

توجه: حالا با توجه به تعداد سؤالاتی که پاسخ صحیح داده‌اید، از یکی از نردبان‌های نشان داده شده در نقشه بالا بروید تا به خانه بعدی برسید و به مطالعه عنوان آمده در آن خانه بپردازید.

نقشه راه دانش‌آموز



- در صورتی که به **همه سؤالات** به طور صحیح پاسخ داده‌اید، **نیازی به مطالعه درس‌نامه ندارید** و می‌توانید وارد بسته تمرین ۱ شوید.
- در صورتی که به **حداقل ۱۸ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، **پس از مطالعه درس‌نامه** اجازه دارید وارد بسته تمرین ۱ شوید.
- در صورتی که به **۱۳ تا ۱۷ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **تمرینات کتاب درسی خود را مجدداً حل کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کرده** و بعد از آن اجازه دارید وارد بسته تمرین ۱ شوید.
- در صورتی که **به کمتر از ۱۳ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **کتاب درسی خود را مجدداً مطالعه کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کنید** و پس از آن اجازه دارید وارد بسته تمرین ۱ شوید.

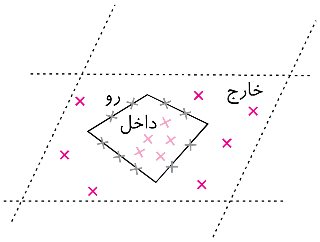
شناسنامه سؤالات پیش آزمون

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴
۲	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱
۳	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲
۴	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴
۵	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲
۶	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱
۷	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳
۸	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱
۹	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳
۱۰	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲
۱۱	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴
۱۲	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱۳	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳
۱۴	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱
۱۵	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱
۱۶	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳
۱۷	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۱
۱۸	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۲
۱۹	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴
۲۰	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۳
۲۱	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۱
۲۲	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۴
۲۳	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۳

درس‌نامه

تعریف ناحیه

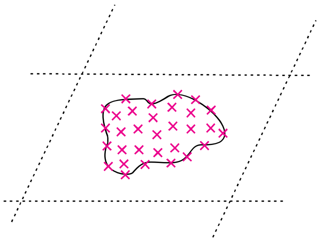


هر چند ضلعی که در یک صفحه رسم شود، آن صفحه را به سه قسمت خارج، روی چند ضلعی و داخل چند ضلعی تقسیم می‌کند.

به مجموعه نقاط واقع در رو و داخل هر چند ضلعی یک ناحیه گفته می‌شود.

تذکر: لزوماً یک چند ضلعی مد نظر نیست بلکه می‌توانیم در حالت کلی در تعریف ناحیه از یک منحنی بسته استفاده کنیم.

به شکل روبه‌رو دقت کنید:



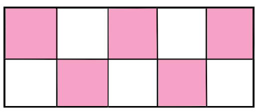
شکل فوق ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که توسط یک منحنی بسته مشخص شده است.

تعریف مساحت

به مقدار سطحی که یک ناحیه در صفحه اشغال می‌کند مساحت آن ناحیه می‌گوییم بنابراین می‌توانیم مساحت یک چند ضلعی را نیز به همین صورت تعریف کنیم.

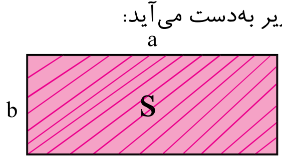
بنا به تعریف: واحد اندازه‌گیری مساحت، سطح اشغال شده توسط یک مربع به ضلع واحد است که به آن یک واحد سطح می‌گوییم.

به عنوان مثال مساحت مستطیل زیر ۱۰ سانتی‌مترمربع است. (هر ضلع مربع را یک سانتی‌متر در نظر گرفتیم.)



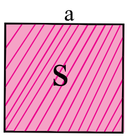
نتیجه: با توجه به شکل بالا طول مستطیل به ۵ قسمت مساوی و عرض آن به ۲ قسمت مساوی تقسیم شده است. حاصل‌ضرب این دو عدد معرف مساحت این مستطیل است.

بنابراین می‌توانیم بگوییم مساحت یک مستطیل به طول و عرض a و b واحد طول ($a\ ,\ b \in \mathbb{N}$) از دستور زیر به‌دست می‌آید:



$S = a \times b =$ طول × عرض

و یا مساحت هر مربع برابر است با مجذور اندازه ضلع آن مربع:



$S = a^{2} = ($ضلع$)^{2}$

تعیین مساحت چند ضلعی‌های محدب

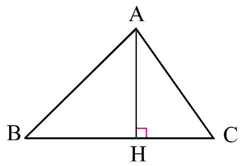
الف) مثلث

برای تعیین مساحت مثلث می‌توانیم از سه دستور زیر استفاده کنیم:

۱) کلاسیک: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC (قاعده) باشد و مساحت این مثلث را با S نمایش دهید، داریم:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC$$

از این دستور بسیار ساده چند نتیجه ساده‌تر ولی بسیار کاربردی زیر را می‌گیریم.



نتیجه ۱: اگر مساحت مثلث ABC و اندازه یک ضلع از آن (مثلاً ضلع BC) را داشته باشیم می‌توانیم ارتفاع وارد بر آن ضلع را از دستور زیر بیابیم.

$$\text{BC ارتفاع وارد بر ضلع} = AH = \frac{۲S}{BC}$$

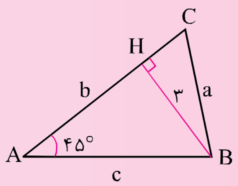
نتیجه ۲: اگر مساحت مثلث ABC و ارتفاع وارد بر یک ضلع را داشته باشیم می‌توانیم اندازه آن ضلع را که ارتفاع بر آن وارد شده با دستور زیر بیابیم.

$$BC = \frac{۲S}{AH}$$

۱. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$ اندازه ارتفاع BH برابر ۳ متر و مساحت مثلث برابر $\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$ مترمربع است. ضلع a چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ «۴» برای تعیین اندازه a کافی است با توجه به شکل اندازه CH را بیابیم بعد از آن با کمک از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BCH، a محاسبه می‌شود.



برای تعیین CH ابتدا اندازه ضلع AC را با توجه به نکته بالا به راحتی به‌دست می‌آوریم.

(مساحت را داریم و اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC را نیز داریم.)

$$AC = \frac{۲S}{BH} = \frac{۹(۱+\sqrt{۳})}{۳} = ۳(۱+\sqrt{۳})$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه AHB $(\hat{H} = ۹۰^\circ)$

$$\begin{cases} \tan(A) = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{BH}{\tan(A)} \\ \hat{A} = ۴۵^\circ \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{۳}{\tan(۴۵)} = ۳$$

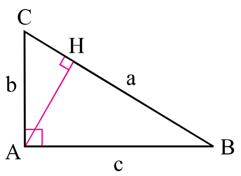
حال:

$$CH = AC - AH \Rightarrow CH = ۳ + ۳\sqrt{۳} - ۳ = ۳\sqrt{۳}$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه BCH داریم:

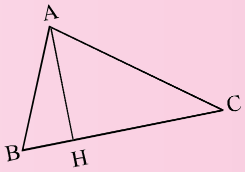
$$a^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ + ۲۷ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶ \quad \text{(رابطه فیثاغورس)}$$

نتیجه ۳: تعیین مساحت مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ برای تعیین مساحت این مثلث می‌توانیم از دستور زیر استفاده کنیم.



$$S = \frac{bc}{۲} = \frac{۱}{۲}\text{(حاصل‌ضرب اندازه اضلاع زاویه قائمه)}$$

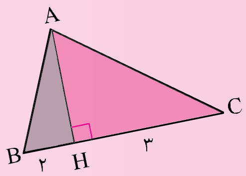
۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر $BH=۲$ و $CH=۳$ باشد، مساحت مثلث ABH چند برابر مساحت مثلث ACH است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» با توجه به نتیجه ۳ داریم:



$$\left.\begin{aligned}S_۱=S_{AHC}=\frac{AH\times HC}{۲}\\ S_۲=S_{AHB}=\frac{AH\times BH}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{HC}{BH}=\frac{۳}{۲}$$

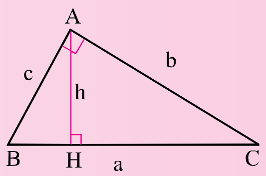
نتیجه ۴: دستور تعیین ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه: با توجه به دو نتیجه (۱) و (۳) در مثلث قائم‌الزاویه بالا اندازه ارتفاع وارد بر وتر را می‌توانیم از دستور زیر به‌دست آوریم.

ارتفاع وارد بر وتر $= AH = \frac{bc}{a} =$ حاصل‌ضرب اضلاع قائمه تقسیم بر وتر

۳. در مثلث قائم‌الزاویه حاصل‌ضرب سه ضلع، K برابر طول ارتفاع وارد بر وتر است. طول وتر کدام است؟

۱) $\frac{k}{۲}$ ۲) $\sqrt{k}$ ۳) $k^۲$ ۴) $k^۳$

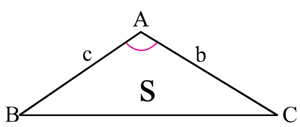
پاسخ: گزینهٔ «۲» اگر مطابق شکل ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را h فرض کنیم، با در نظر گرفتن نتیجه ۴ می‌توانیم بنویسیم:



$$\begin{cases}abc=kh\Rightarrow bc=\frac{kh}{a}\\ h=\frac{bc}{a}\Rightarrow h=\frac{\frac{۱}{a}kh}{a}\Rightarrow h=\frac{kh}{a^۲}\end{cases}$$

$$a^۲=k\Rightarrow a=\sqrt{k}$$

۲) مثلثاتی: با معلوم بودن اندازه دو ضلع و زاویه بین آن دو در هر مثلث می‌توانیم با استفاده از دستور زیر مساحت مثلث را به‌دست آوریم:

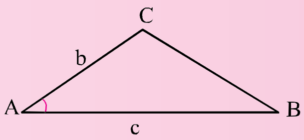


$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A$$

۴. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۶۴ سانتی‌مترمربع و واسطه هندسی بین ضلع‌های AB و AC برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد آن‌گاه $\sin(A)$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» با استفاده از تعریف واسطه هندسی و دستور قبل تست به راحتی قابل حل است.



اگر k واسطه هندسی بین b و c باشد.

$$b\times c = k^{۲} \Rightarrow b\times c = (۱۲)^{۲}$$
$$\Rightarrow b\times c = ۱۴۴$$

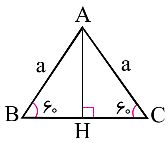
از طرفی:

$$S = \frac{۱}{۲} b\times c\sin(A)$$
$$\Rightarrow ۶۴ = \frac{۱}{۲}(۱۴۴)\sin A \Rightarrow \sin(A) = \frac{۸}{۹}$$

نتیجه کاربردی در مثلث متساوی‌الاضلاع: مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

نتیجه ۱: دستور تعیین مساحت: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از دستور زیر تعیین می‌شود:

$$S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$



نتیجه ۲: دستور تعیین اندازه ارتفاع، میانه و نیمساز: می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع، میانه و نیمساز بر هم منطبق‌اند؛ پس:

$$s = \frac{۱}{۲}AH\times BC \to \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = \frac{۱}{۲}\times AH\times a \to AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = a\sin(۶۰^{\circ})$$

نتیجه ۳: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a نسبت مساحت به اندازه ارتفاع عدد ثابت $\frac{a}{۲}$ است.

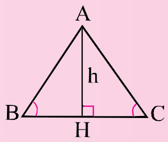
$$\frac{S}{AH} = \frac{a}{۲}$$

۵. در مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت $۸\sqrt{۳}$، طول ارتفاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» با توجه به نتایج بالا برای تعیین اندازه ارتفاع کافی است اندازه ضلع را بیابیم؛ پس:

$$S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} \to ۸\sqrt{۳} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow a^{۲} = ۳۲ \Rightarrow a = ۴\sqrt{۲}$$

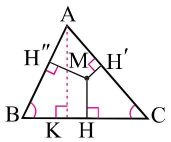


$$\frac{S}{AH} = \frac{a}{۲} \Rightarrow AH = \frac{۲S}{a} \Rightarrow AH = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۶}$$

نتیجه ۴: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مجموع فواصل هر نقطه:

۱) درون مثلث از سه ضلع برابر است با ارتفاع وارد بر ضلع. به طور مثال اگر M یک نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، داریم:

$$MH + MH' + MH'' = AK = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$



۶. **مجموع فواصل یک نقطه دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر است با ۹. مساحت این مثلث کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

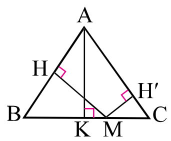
پاسخ: گزینهٔ «۱» با توجه به نکته بالا ارتفاع این مثلث برابر ۹ است که اگر ارتفاع را با حرف h نمایش دهیم و اندازه ضلع این مثلث را a فرض کنیم:

$$h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۹ = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = ۶\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۳۶ \times ۳ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۲۷\sqrt{۳}$$

۲) روی یکی از اضلاع از دو ضلع دیگر برابر است با یک ارتفاع؛ برای مثال اگر M یک نقطه دلخواه روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد.

$$MH + MH' = AK = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

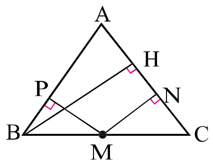


نتیجه ۵: با در نظر گرفتن نتیجه ۴ اگر مثلث ABC را یک مثلث متساوی‌الساقین در رأس A فرض کنیم خواهیم داشت:

۱) اگر M یک نقطه دلخواه روی قاعده این مثلث باشد:

مجموع فواصل این نقطه از دو ساق این مثلث برابر است با ارتفاع وارد بر ساق در این مثلث. داریم:

$$MN + MP = BH$$

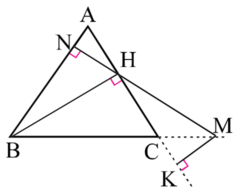


تذکر: دقت داشته باشید که ارتفاع وارد بر ساق AC اندازه‌اش با ارتفاع وارد بر ساق AB یکسان است.

۲) اگر M یک نقطه دلخواه روی امتداد قاعده مثلث باشد:

قدر مطلق تفاضل فواصل این نقطه از دو ساق این مثلث برابر است با یک ارتفاع وارد بر ساق

$$|MK - MN| = BH$$

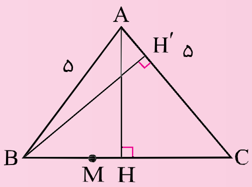


۷. در مثلثی به اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد نقطه M ضلع بزرگ‌تر را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است. مجموع فواصل M از دو ساق این مثلث کدام است؟

۱) ۳/۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) ۵/۴

پاسخ: گزینهٔ «۳» می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، میانه و نیم‌ساز نظیر رأس بر هم منطبق‌اند. بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A ارتفاع AH میانه ضلع BC نیز می‌باشد. پس $HC=۳$ خواهد بود.

حال با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث AHC ضلع AH را که همان ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌باشد، محاسبه می‌کنیم.



$$AH^۲=AC^۲-HC^۲ \Rightarrow AH^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow AH=۴$$

از طرفی:

$$\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}BH'\times AC$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶=\frac{۱}{۲}BH'\times ۵ \Rightarrow BH'=\frac{۲۴}{۵}$$

حال با توجه به نتیجه بالا مجموع هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث از دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق یعنی جای نقطه مهم نیست پس این مجموع برابر است با: $\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$.

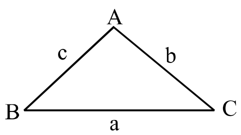
۳) دستور هرون: با معلوم بودن اندازه سه ضلع، با استفاده از دستور هرون می‌توانیم مساحت مثلث را بیابیم. مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید.

با فرض:

$$P=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$$

مساحت از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

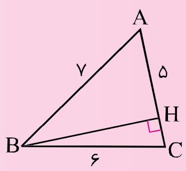


۸. در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB=۷$، $AC=۵$ و $BC=۶$ است. اندازه ارتفاع وارد بر ضلع کوچک این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۶}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» برای تعیین ارتفاع وارد بر ضلع کوچک (یعنی ارتفاع وارد بر ضلع BC) ابتدا باید مساحت را بیابیم سپس با توجه به نکات گفته شده اندازه ارتفاع به راحتی قابل محاسبه است.

ابتدا مساحت را با استفاده از دستور هرون به‌دست می‌آوریم.



$$P=\frac{۱}{۲}(۷+۶+۵)=۹$$

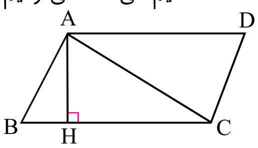
$$S=\sqrt{۹(۹-۷)(۹-۶)(۹-۵)}=\sqrt{۹\times ۲\times ۳\times ۴}=۶\sqrt{۶}$$

$$AH=\frac{۲S}{AC} \Rightarrow AH=\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۵}$$

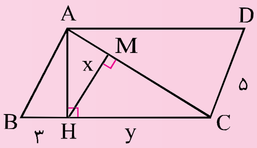
ب) متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند، می‌توانیم مساحت متوازی‌الاضلاع را از دستور زیر به‌دست آوریم.

$$S = AH \times BC = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}$$



۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل زیر حاصل $x+y$ کدام است، اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ۲۸ باشد؟



۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۲(۲+\frac{\sqrt{۲}}{۴})$

۳) $۲(۲+\sqrt{۲})$ ۴) $۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» در مثلث قائم‌الزاویه AHB $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ طبق دستور فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} AH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \\ AH = ۴ \end{cases}$$

حال با در نظر گرفتن دستور تعیین مساحت متوازی‌الاضلاع:

$$S = AH \times BC \Rightarrow ۲۸ = ۴ \times (۳+y) \Rightarrow \boxed{y=۴}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه AHC $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ طبق فیثاغورس:

$$AC^۲ = AH^۲ + HC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۶+۱۶ \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۲}$$

در همین مثلث می‌توان نوشت:

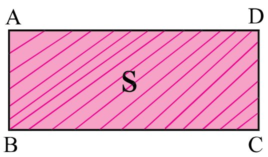
$$\text{ارتفاع وارد بر وتر} = HM = \frac{AH \times HC}{AC} \rightarrow x = \frac{۴\times۴}{۴\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

$$x+y = ۴+۲\sqrt{۲} = ۲(۲+\sqrt{۲})$$

پ) مستطیل

با توجه به این نکته که مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که دارای زاویه قائمه است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = AD \times AB = \text{عرض} \times \text{طول}$$



۱۰. یک مزرعه مستطیل شکل که عرض آن نصف طولش است، تماماً با x متر نرده محصور شده است. مساحت مزرعه بر حسب x کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۲۴}$ ۲) $\frac{x^۲}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲x^۲}{۹}$ ۴) $\frac{x^۲}{۷۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» در مستطیل ABCD با در نظر گرفتن صورت سؤال داریم:

$$۱)\ AB = \frac{۱}{۲}AD$$

$$۲)\ x = \text{محیط مستطیل}$$

$$x = ۲(AB+AD) \Rightarrow x = ۲(AB+۲AB) = ۶AB \Rightarrow AB = \frac{۱}{۶}x \Rightarrow AD = \frac{۱}{۳}x$$

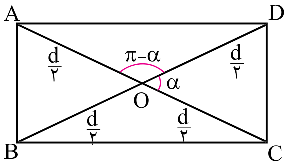
$$\text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض} = AB \times AD = \frac{۱}{۱۸}x^۲$$

یک نکته جالب: اگر در یک مستطیل دو قطر را رسم کنیم چهار مثلث متساوی‌الساقین با مساحت‌های برابر حاصل می‌شود به شکل دقت کنید.

در مستطیل ABCD اگر اندازه قطر را d فرض کنیم.

$$S=۴(\underbrace{\frac{۱}{۲}(\frac{d}{۲})^۲\sin\alpha}_{\text{مساحت یکی از مثلث ها}})$$

$$S=\frac{۱}{۲}d^۲\sin(\alpha)$$



۱۱. اگر طول یک مستطیل برابر ۶ و زاویه بین دو قطر آن ۶۰° باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

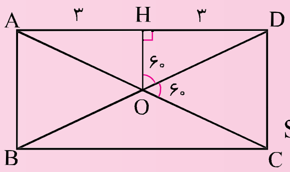
۱) $\frac{۲۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» برای تعیین مساحت کافی است اندازه قطر مستطیل را به‌دست آوریم. با توجه به شکل زاویه $\widehat{DOA}$ برابر ۱۲۰° و چون مثلث $\overset{\Delta}{DOA}$ در رأس O متساوی‌الساقین است اگر ارتفاع OH را در این مثلث رسم کنیم در مثلث قائم‌الزاویه OHD $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ زاویه $\hat{O}$ برابر ۶۰ می‌شود؛ زیرا OH نیمساز نیز می‌باشد. از طرفی OH میانه می‌باشد لذا HD برابر ۳ خواهد بود. حال به کمک روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه OHD داریم:

$$\sin(O)=\frac{HD}{OD}\Rightarrow OD=HD\times\sin(O)\Rightarrow OD=۳\times\sin(۶۰)=۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حال قطر مستطیل دو برابر OD است. بنابراین: $d=۳\sqrt{۳}$

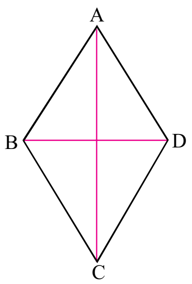
حال به کمک نکته فوق: $S=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۳})^۲\sin(۶۰)\Rightarrow S=\frac{۲۷}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$



ت) لوزی:

مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه دو قطر آن لوزی.

$$S=\frac{۱}{۲}(AC\times BD)$$

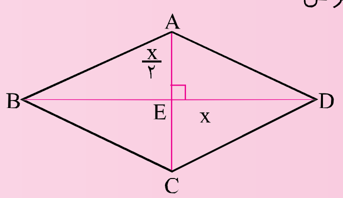


۱۲. در یک لوزی یکی از قطرها دو برابر قطر دیگر است. اگر مساحت این لوزی برابر ۵ باشد، محیط این لوزی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۰}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» در لوزی ABCD فرض می‌کنیم $BD=۲AC$ باشد. حال با فرض $AC=x$ داریم $BD=۲x$، $ED=x$ و $AE=\frac{x}{۲}$. اگر S مساحت این لوزی باشد:

$$S=\frac{۱}{۲}(BD\times AC)=\frac{۱}{۲}(۲x^۲)=x^۲$$



از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه AED:

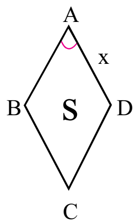
$$AD^۲=AE^۲+ED^۲\Rightarrow AD^۲=\frac{۱}{۴}x^۲+x^۲\Rightarrow AD^۲=\frac{۵}{۴}x^۲\Rightarrow AD^۲=\frac{۵}{۴}S\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{۵S}}{۲}\xrightarrow{S=۵}AD=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین محیط برابر است با $۴AD=۱۰$.

دستوری دیگر برای تعیین مساحت لوزی

با معلوم بودن اندازه ضلع و یکی از زاویه‌ها می‌توان مساحت لوزی را یافت.

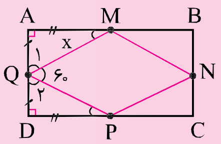
$$S = x^2 \sin(A)$$



۱۳. در یک مستطیل وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. اگر یکی از زوایای داخلی چهار ضلعی پدید آمده برابر 60° باشد و بدانیم مساحت این چهار ضلعی $2\sqrt{3}$ است، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» چهار ضلعی پدید آمده یک لوزی است که ضلع آن را به عنوان مثال $QM = x$ فرض می‌کنیم. با در نظر گرفتن نکته اخیر داریم:



$$S = x^2 \sin\hat{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} = x^2 \sin 60^\circ \Rightarrow 2\sqrt{3} = x^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AQM}$ و $\overset{\Delta}{QDP}$ به حالت سه ضلع با هم همنهشت هستند، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$$

حال:

$$\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + 60 = 180 \Rightarrow 2\hat{Q}_1 = 120 \Rightarrow \hat{Q}_1 = 60$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه 60° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است؛ لذا در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{QAM}$:

$$\hat{M} = 30^\circ \Rightarrow AQ = \frac{1}{2}QM \Rightarrow AQ = 1$$

$$\hat{Q}_1 = 60^\circ \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}QM \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

بنابراین در مستطیل ABCD:

طول $= 2AM = 2\sqrt{3}$

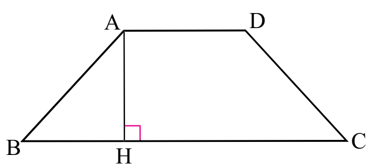
عرض $= 2AQ = 2$

در نتیجه مساحت برابر است با: مساحت مستطیل = طول × عرض $= 4\sqrt{3}$

ث) ذوزنقه

ذوزنقه ABCD را در نظر بگیرید برای تعیین مساحت این ذوزنقه می‌توان از یکی از دو دستور زیر استفاده کرد.

۱)



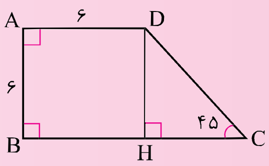
$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)AH$$

۱۴. یک زاویه ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای ۴۵° است. اگر ارتفاع و قاعده کوچک ذوزنقه هر دو ۶cm باشند، آن‌گاه مساحت ذوزنقه چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۵۰ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ «۱» در ذوزنقه ABCD ارتفاع DH را رسم می‌کنیم. واضح است که DH = ۶.

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{DHC}$:

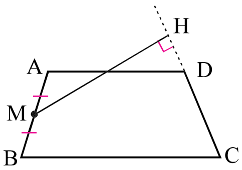


$$\tan C = \frac{DH}{HC} \Rightarrow \begin{cases} \tan ۴۵^\circ = \frac{۶}{HC} \Rightarrow HC = ۶ \\ \tan ۴۵^\circ = ۱ \end{cases}$$

حال با استفاده از دستور (۱):

$$S = \frac{۱}{۲}(AD + \underbrace{BC}_{BH+HC})AB = \frac{۱}{۲}(۶+۱۲)\times ۶ \Rightarrow S = ۵۴$$

۲) اگر M وسط ساق AB باشد و MH فاصله M از ساق روبه روی آن ، مساحت ذوزنقه ABCD را می‌توانیم از دستور زیر به‌دست آوریم.

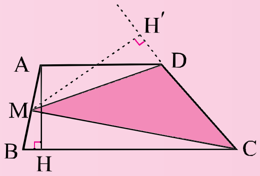


$$S = MH \times DC$$

۱۵. در ذوزنقه ABCD، M وسط ساق AB است. اگر AD = ۳ و BC = ۷ و فاصله A از قاعده BC برابر ۵ باشد، مساحت مثلث MDC کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۴

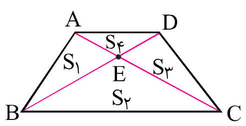
پاسخ: گزینهٔ «۱» با توجه به نکته بالا مساحت مثلث MDC نصف مساحت ذوزنقه است؛ بنابراین:



$$S_{MDC} = ۲(\frac{۱}{۲}(AD + BC)AH)$$

$$S_{MDC} = ۵۰$$

نکته: ذوزنقه ABCD را در نظر بگیرید؛ اگر قطرهای AC و BD را رسم کنیم، بین مساحت‌های مثلث‌هایی که از تلاقی این دو قطر پدید می‌آیند روابط زیر برقرار است.



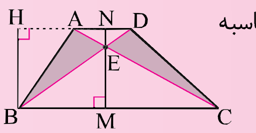
$$\begin{cases} ۱) S_{ABC} = S_{BDC} \\ ۲) S_{ABD} = S_{ADC} \\ ۳) S_{ABE} = S_{DEC} \end{cases}$$

۱۶. در ذوزنقه ABCD ، $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ ، $AD=\sqrt{۳}$ و $AB=۶$ و فاصله نقطه تلاقی دو قطر از قاعده برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ «۳» با توجه به شکل و مفروضات مسئله و نکته فوق:

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = S_{ABD} + S_{ADC} - ۲S_{AED}$$



(چون $S_{ABD} = S_{ADC}$ در جمع این دو مساحت، مساحت مثلث AED دو بار محاسبه می‌شود که با کم کردن دو بار آن مساحت قسمت هاشور خورده به‌دست می‌آید)

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} AD \times AB \times \sin(A) = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times ۶ \times \sin(۱۲۰) \Rightarrow S_{ABD} = \frac{۹}{۲}$$

از طرفی BH ارتفاع وارد بر قاعده AD از رأس B در مثلث ABD برابر است با:

$$BH = \frac{۲(S_{ABD})}{AD} = \frac{۹}{\sqrt{۳}} = ۳\sqrt{۳}$$

حال:

$$EN = BH - EM = ۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

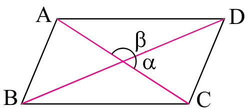
$$S_{AED} = \frac{۱}{۲} \times EN \times AD = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = ۲(S_{ABD}) - ۲(S_{AED}) = ۲(\frac{۹}{۲}) - ۲(\frac{۳}{۲}) = ۹ - ۳ = ۶$$

نکته: برای تعیین مساحت هر چهار ضلعی همواره می‌توانید از دستور زیر استفاده کنید:

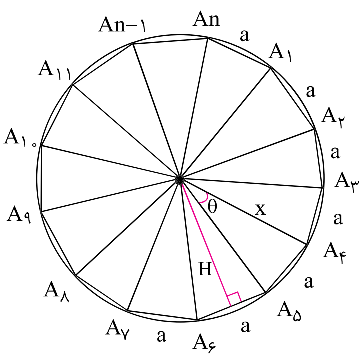
نصف حاصل‌ضرب اندازه دو قطر در سینوس زاویه بین آن‌ها = مساحت چهار ضلعی

$$S = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin(\alpha) = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin(\beta)$$



تعیین مساحت n ضلعی‌های منتظم

یک n ضلعی منتظم به ضلع a را در نظر می‌گیریم. اگر از مرکز این n ضلعی به رأس‌های آن وصل کنیم سطح n ضلعی به n مثلث متساوی‌الساقین تقسیم می‌شود به طوری که :



۱) زاویهٔ هر رأس در هر مثلث $\theta = \frac{۳۶۰}{n}$

۲) ارتفاع هر مثلث متساوی‌الساقین در n ضلعی منتظم $H_n = \frac{a}{۲\tan(\frac{۱۸۰}{n})}$

۳) ارتفاع هر ساق مثلث متساوی‌الساقین در n ضلعی منتظم $X_n = \frac{a}{۲\sin(\frac{۱۸۰}{n})}$

حال برای تعیین مساحت این n ضلعی کافی است مساحت یکی از مثلث‌ها را به‌دست آوریم و در n ضرب کنیم. پس اگر S_n را مساحت n ضلعی منتظم بنامیم، داریم:

$$S_n = \frac{na^۲}{۴\tan(\frac{۱۸۰}{n})}$$

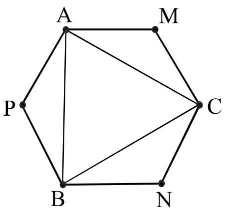
۶ ضلعی منتظم

یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a را در نظر بگیرید. در این ۶ ضلعی داریم:

$$\begin{cases} ۱) H_n = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})a \\ ۲) X_n = a \\ ۳) S_n = (\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})a^۲ \end{cases}$$

نکته: یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a و مساحت $S = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ را در نظر بگیرید و به شکل‌های زیر دقت کنید که در حل سؤالات به شما کمک خواهند کرد:

۱) اگر مطابق شکل ۳ قطر کوچک ۶ ضلعی را رسم کنیم، مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع بوده و در آن:

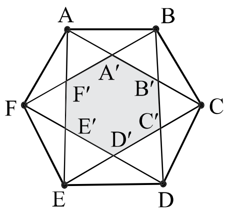


الف) اندازه هر ضلع $= a\sqrt{۳}$

ب) $S_{ABC} = (\frac{۳\sqrt{۳}}{۴})a^۲ = \frac{۱}{۲}S$

پ) $S_{AMC} = S_{NCB} = S_{PAB} = (\frac{\sqrt{۳}}{۴})a^۲ = \frac{۱}{۶}S$

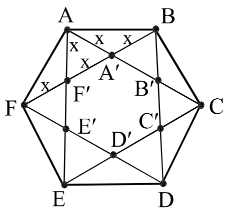
۲) اگر مطابق شکل تمام قطرهای کوچک ۶ ضلعی را رسم کنیم از برخورد این قطرها شش‌ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'F'$ حاصل می‌شود که:



الف) اندازه هر ضلع آن $= \frac{۱}{۳}$(قطر کوچک)$ = \frac{۱}{۳}(a\sqrt{۳})$

ب) $S_{A'B'C'D'E'F'} = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})a^۲ = \frac{۱}{۳}S$

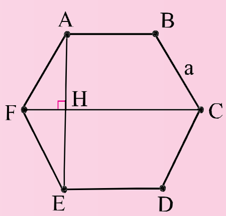
۳) به راحتی ثابت می‌شود که هر قطر کوچک ۶ ضلعی منتظم اولیه توسط رأس‌های ۶ ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'F'$ به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. بنابراین با توجه به شکل زیر داریم:



الف) $x = \frac{۱}{۳}(a\sqrt{۳})$

ب) $S_{AF'F} = S_{AF'A'} = S_{AA'B} = \frac{۱}{۳}(S_{AFB}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۱۲})a^۲ = (\frac{۱}{۱۸})S$

۱۷. در شش ضلعی منتظم به ضلع a حاصل $AE \times FH$ چقدر است؟



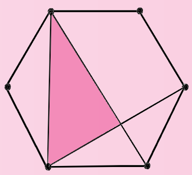
۱) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $a^۲\sqrt{۳}$

۳) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» با توجه به نکات گفته شده از قبل AE قطر کوچک است پس $AE = a\sqrt{۳}$. از طرفی FH ارتفاع وارد بر ضلع AE از مثلث AFE می‌باشد و با توجه به این‌که $S_{AFE} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ در نتیجه:

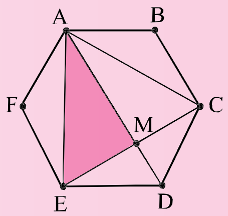
$$FH = \frac{۲S_{AFE}}{AFC} = \frac{\frac{۱}{۲}a^۲\sqrt{۳}}{a\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}a \quad \text{و} \quad AE \times FH = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۸. در شش ضلعی منتظم شکل روبه‌رو به ضلع a، مساحت ناحیه سایه خورده کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}a^۲$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}a^۲$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}a^۲$ ۴) $\sqrt{۳}a^۲$

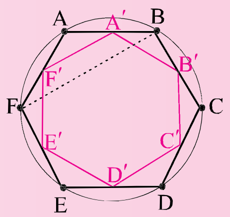


پاسخ: گزینهٔ «۲» با توجه به شکل در مثلث AEC ، AM شش ضلعی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند لذا AM میانه EC می‌باشد. بنابراین مساحت قسمت سایه خورده نصف مساحت مثلث AEC است در نتیجه:

$$S_{AEM}=\frac{۱}{۲}S_{AEC}=\frac{۱}{۲}(\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}a^۲$$

۱۹. در یک ۶ ضلعی منتظم اندازه قطر کوچک ۴ می‌باشد. اگر وسط‌های اضلاع این ۶ ضلعی را به هم وصل کنیم مساحت ۶ ضلعی به وجود آمده کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

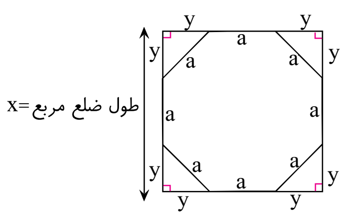


پاسخ: گزینهٔ «۴» F' و A' وسط اضلاع AF و AB هستند لذا در مثلث AFB، طبق قضیه تالس $A'F' \parallel FB$ و طبق عکس تعمیم قضیه تالس $F'A'=\frac{۱}{۲}FB$.
پس $F'A'=۲\sqrt{۳}$، در نتیجه طبق فرمول مساحت ۶ ضلعی:

$$S_{A'B'C'D'E'F'}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times(۲\sqrt{۳})^۲=۱۸\sqrt{۳}$$

۸ ضلعی منتظم

از امتداد اضلاع هر ۸ ضلعی منتظم و تقاطع آن‌ها طبق شکل زیر یک مربع حاصل می‌شود که به آن مربع محیطی آن ۸ ضلعی می‌گویند. به بیان دیگر همواره هر ۸ ضلعی منتظم درون یک مربع قابل محاط شدن است.



$$y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a \quad و \quad x=(\sqrt{۲}+۱)a \quad و \quad a=(\sqrt{۲}-۱)x$$

مساحت ۸ ضلعی

الف) برحسب a $\qquad S=۲a^۲(\sqrt{۲}+۱)$

ب) برحسب x $\qquad S=۲x^۲(\sqrt{۲}-۱)$

۲۰. یک هشت ضلعی منتظم در یک مربع محاط شده است. اگر ضلع هشت ضلعی $\sqrt{۲}$ باشد ضلع مربع کدام است؟

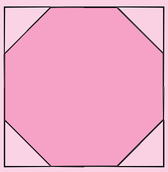
۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\sqrt{۲}$ ۴) $۲+۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» اگر x را ضلع مربع و a را ضلع فرض کنیم با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$S=۲a^{۲}(\sqrt{۲}+۱)\rightarrow S=۲(\sqrt{۲})^{۲}(\sqrt{۲}+۱)=۴(\sqrt{۲}+۱)$$

$$S=۲x^{۲}(\sqrt{۲}-۱)\rightarrow S=۴(\sqrt{۲+۱})=۲x^{۲}(\sqrt{۲}-۱)\rightarrow x^{۲}=\frac{(۲\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۲}-۱}=۲(\sqrt{۲}+۱)^{۲}\rightarrow x=۲+\sqrt{۲}$$

۲۱. در شکل روبه‌رو مساحت مربع ۲ واحد مربع است. مساحت ۸ ضلعی منتظم کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}-۴$ ۲) $۸-۴\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۴) $۴-۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» با توجه به نکته گفته شده مساحت ۸ ضلعی منتظم برحسب ضلع مربع محیطی آن برابر است با $۲x^{۲}(\sqrt{۲}-۱)$ که $x^{۲}$ همان مساحت مربع است لذا:

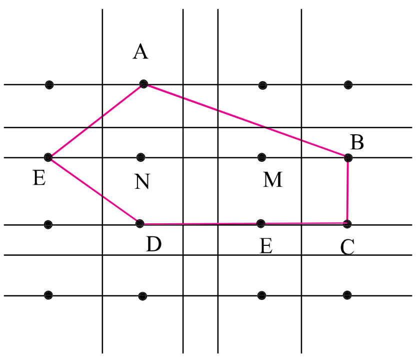
$$S=۲(۲)(\sqrt{۲}-۱)=۴\sqrt{۲}-۴$$

نقاط شبکه‌ای و مساحت

مجموعه‌ای از نقاط را تصور کنید که بر روی خط‌های موازی افقی و عمودی قرار دارند به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی از یکدیگر برابر واحد باشد. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای می‌نامند و به هر چند ضلعی که تمام رأس‌های آن روی نقاط شبکه‌ای واقع باشند یا به بیان دیگر هر رأس آن چند ضلعی یکی از نقاط شبکه‌ای باشد، چند ضلعی‌های شبکه‌ای گفته می‌شود.

نقاط مرزی

به نقاطی از نقاط شبکه‌ای گفته می‌شود که روی ضلع‌های چند ضلعی قرار داشته یا رأس آن چند ضلعی باشند، مانند نقاط D، C، B، A و E که رأس هستند و نقطه E که روی ضلع DC قرار دارد. این‌ها نقاط مرزی هستند.

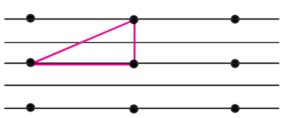


نقاط درون شبکه‌ای

به مجموعه نقاط گفته می‌شود که درون چند ضلعی هستند مانند M و N.

بنا به قرارداد تعداد نقاط مرزی را با حرف b و تعداد نقاط درونی را با حرف i نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال در شکل بالا $b=۶$ و $i=۲$.



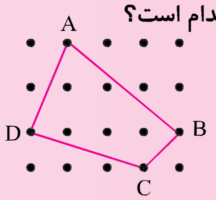
تذکر: مثلث کوچک‌ترین چند ضلعی است بنابراین:

کم‌ترین مقدار برای b برابر است با ۳ و کم‌ترین مقدار برای i برابر است با ۰.

فرمول پیک برای تعیین مساحت: یک چند ضلعی شبکه‌ای را در نظر بگیرید که در آن b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی باشند و اگر S مساحت این چند ضلعی باشد، داریم:

$$S = (\frac{b}{۲}) - ۱ + i$$

۲۲. در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی برابر ۱ واحد است. مساحت چهار ضلعی ABCD کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۴/۵

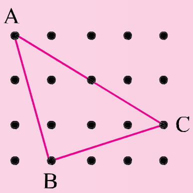
۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ «۴» با توجه به دستور بالا:

$b = ۴ \quad , \quad i = ۵$

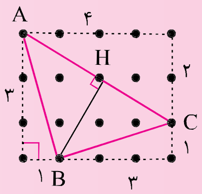
$$S = (\frac{b}{۲}) - ۱ + i = (\frac{۴}{۲}) - ۱ + ۵ = ۶$$

۲۳. در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی یک واحد است. طول ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$



پاسخ: گزینهٔ «۳» با توجه به شکل و رابطه فیثاغورس ابتدا اضلاع مثلث را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۵}$$

$$BC^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۰}$$

$$AB^۲ = ۹ + ۱ = ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۰}$$

در نتیجه AC بزرگ‌ترین ضلع است. حال کافی است مساحت مثلث را بیابیم. با توجه به فرمول پیک:

$$\begin{cases} b = ۴ \\ i = ۴ \end{cases} \Rightarrow S = (\frac{b}{۲}) - ۱ + i = ۵$$

$$\text{ارتفاع وارد بر } AC = BH = \frac{۲S}{AC} = \frac{۱۰}{۲\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

بسته تمرین ۱

۱. در مثلث ABC، $\widehat{A}=۴۵^\circ$ اندازه ارتفاع BH برابر با ۳ متر و مساحت مثلث برابر با $\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$ مترمربع است. ضلع a چند متر است؟ (سراسری ریاضی ۶۳)

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

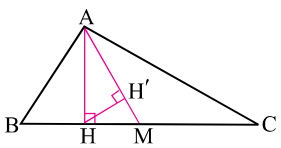
۲. اگر طول اضلاع مثلثی ۲، ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی ۶۹)

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳. ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه وتر را به دو قسمت به طول‌های ۳ و ۱۲ سانتی‌متر تقسیم کرده است. مساحت این مثلث چند سانتی‌مترمربع است؟ (سراسری تجربی ۶۶)

۱) ۲۶ ۲) ۴۵ ۳) ۴۲ ۴) ۴۰

۴. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$، AH ارتفاع، AM میانه، $\widehat{H'}=۹۰^\circ$ ، $HH'=۱$ و $BC=۴$، آن‌گاه: (آزاد تجربی ۷۴)



۱) $S_{\overset{\triangle}{AHM}}=\frac{۳}{۲}$ ۲) $S_{\overset{\triangle}{AHM}}=۲$

۳) $S_{\overset{\triangle}{AHM}}=\frac{۱}{۲}$ ۴) $S_{\overset{\triangle}{AHM}}=۱$

۵. مساحت مثلث ABC که در آن $BC=\sqrt{۶}$ و $AC=۲$ و میانه CM برابر $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ است، چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۶. در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۷. فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اطاق مستطیل شکل ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸. در یک مستطیل وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت مستطیل به مساحت شکل حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۳

۹. در لوزی ABCD، $AB=۵$ و $\cos A=-\frac{۳}{۵}$. مساحت آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۶۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۸

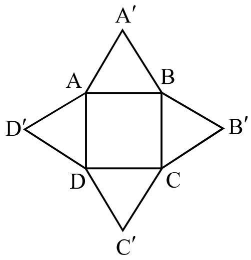
۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۰. در مربعی مجموع یک ضلع و قطر برابر $۲+\sqrt{۸}$ می‌باشد. مساحت مربع چقدر است؟ (آزاد تجربی ۶۹)

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۱۱. در شکل زیر ABCD مربع و روی هر ضلع آن مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. نسبت مساحت چهار ضلعی $A'B'C'D'$ به مربع چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۴)



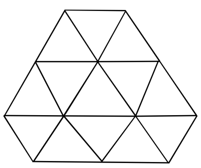
۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) ۳

۳) $۱+۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۱۲. در ذوزنقه متساوی‌الساقین به قاعده ۱۲ و ۴، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. مساحت چهار ضلعی حاصل چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

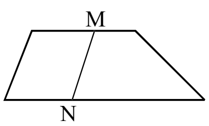
۱۳. محیط شکل مقابل ۱۸ واحد است. مساحت بزرگ‌ترین ذوزنقه چند واحد مربع است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۹۱)



۱) $۷\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$

۳) $۹\sqrt{۳}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

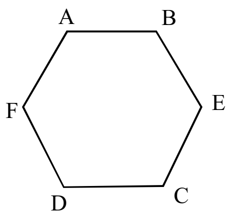
۱۴. در شکل زیر اندازه قاعده‌های بزرگ‌تر ذوزنقه ۲۱ و ۱۵ واحد است. پاره‌خط MN شکل اصلی را به متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه هم مساحت تقسیم کرده است. نقطه N قاعده ذوزنقه اصلی را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۹۲)



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۱۵. در شش ضلعی منتظم به ضلع ۲، مساحت چهار ضلعی ABCD چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۴)



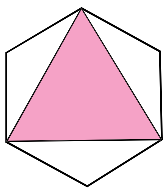
۱) $۱+۲\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۶. اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل زیر ۴ باشد، مساحت مثلث سایه زده شده چند واحد مربع است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

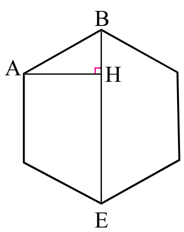


۱) $۱۲\sqrt{۳}$

۲) $۱۶\sqrt{۲}$

۳) $۱۶\sqrt{۳}$

۴) $۱۸\sqrt{۲}$

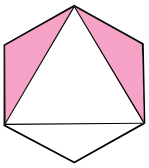


۱۷. مساحت در شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۸

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

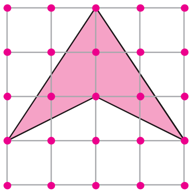
۱۸. اگر طول ضلع ۶ ضلعی منتظم ۴ باشد، مساحت قسمت سایه خورده چقدر است؟ (تجربی ۸۳)



۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$

۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

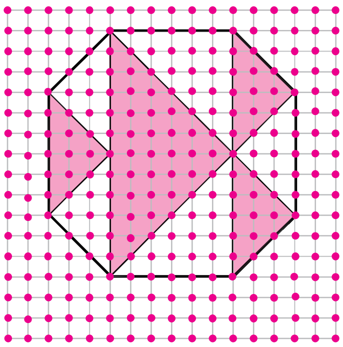
۱۹. در شکل زیر مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۶   ۴) ۴

۲۰. در شکل زیر تقریباً چند درصد از سطح ۸ ضلعی هاشورخورده است؟



۱) ۵۷   ۲) ۵۸

۳) ۵۹   ۴) ۶۰

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴
۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخ‌گویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخ‌گویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times ۱۰۰$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۱

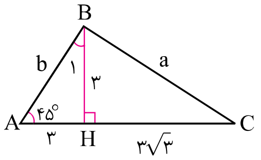
شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۲	سؤال متناظر در بسته تمرین ۳
۱	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳
۲	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳
۳	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۴، ۵، ۶	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳
۴	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴	۴، ۵، ۶	۳، ۴، ۵	۳، ۴، ۵
۵	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۶، ۷، ۸	۳، ۴، ۵	۳، ۴، ۵
۶	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۹	۶	۶
۷	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۱	۱۰، ۱۱	۷	۷
۸	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۱۰، ۱۱	۷	۷
۹	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳	۱۲، ۱۳	۸، ۹	۶
۱۰	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۱۲، ۱۳	۸، ۹	۶
۱۱	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۴	۱۲، ۱۳	۸، ۹	۶
۱۲	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۳	۱۴، ۱۵، ۱۶	۱۰، ۱۱	۸، ۱۰، ۱۱
۱۳	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۱۴، ۱۵، ۱۶	۱۰، ۱۱	۸، ۱۰، ۱۱
۱۴	مساحت چند ضلعی‌های محدب		۲	۱۴، ۱۵، ۱۶	۱۰، ۱۱	۸، ۱۰، ۱۱
۱۵	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴	۱۷، ۱۸، ۱۹	۱۲، ۱۳، ۱۴	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۶	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۱	۱۷، ۱۸، ۱۹	۱۲، ۱۳، ۱۴	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۷	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴	۱۹، ۲۰، ۲۱	۱۲، ۱۳، ۱۴	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۸	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴	۱۹، ۲۰، ۲۱	۱۲، ۱۳، ۱۴	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۹	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۴	۲۲، ۲۳	۱۵	۱۵
۲۰	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۱	۲۲، ۲۳	۱۵	۱۵

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۴» مطابق شکل داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}BH\times AC\Rightarrow AC=\frac{۲S}{BH}=\frac{۹(۱+\sqrt{۳})}{۳}=۳+۳\sqrt{۳}$$

با توجه به آن‌که در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABH}$ زاویه $\widehat{A}=۴۵^\circ$ است، لذا $\widehat{B}=۹۰^\circ-\widehat{A}=۴۵^\circ$ و یا $\widehat{A}=\widehat{B}_۱$. بنابراین مثلث ABH قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است لذا:

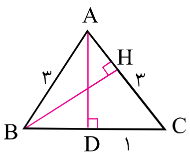


$$AH=BH=۳ \Rightarrow HC=AC-AH=۳\sqrt{۳}$$

در مثلث قائمهٔ BHC طبق رابطهٔ فیثاغورس:

$$BC^۲=BH^۲+HC^۲ \Rightarrow a^۲=۳^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۳۶ \Rightarrow a=۶$$

۲ گزینهٔ «۱» روش اول: در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نظیر قاعده نیز می‌باشد پس داریم:



$$\overset{\Delta}{ADC}: AD^۲=AC^۲-CD^۲=۹\quad ۱=۸ \quad AD=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت مثلث}=S_{ABC}=\frac{a\times h_a}{۲}=\frac{b\times h_b}{۲} \Rightarrow a\times h_a=b\times h_b \Rightarrow ۲\times ۲\sqrt{۲}=۳\times h_b \Rightarrow h_b=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

روش دوم: می‌دانیم در هر مثلث مساحت طبق رابطهٔ هرون برابر است با:

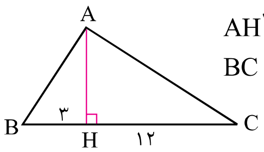
$$\begin{cases} S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ P=\dfrac{a+b+c}{۲} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} S=\sqrt{۴(۴-۲)(۴-۳)(۴-۳)}=\sqrt{۸} \\ P=\dfrac{۲+۳+۳}{۲}=۴ \end{cases}$$

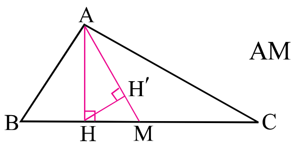
$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AC\times BH}{۲}=\frac{۳\times BH}{۲}=\sqrt{۸} \Rightarrow BH=\frac{۲\sqrt{۸}}{۳}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۳ گزینهٔ «۲» می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده است، پس:



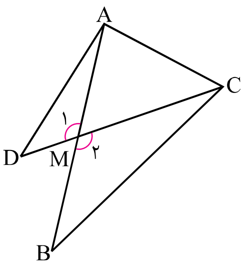
$$\left.\begin{aligned} AH^۲=BH\times CH=۳\times ۱۲=۳۶ \Rightarrow AH=۶ \\ BC=BH+CH=۳+۱۲=۱۵ \end{aligned}\right\} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۵\times ۶=۴۵$$

۴ گزینهٔ «۴» در مثلث قائمه میانه وارد بر وتر نصف وتر است؛ پس:



$$AM=\frac{BC}{۲}=۲ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AHM}}=\frac{۱}{۲}\times AM\times HH'=\frac{۱}{۲}(۲\times ۱)=۱$$

۵ گزینهٔ «۲» هرگاه میانه CM را به اندازه خود تا نقطه D امتداد دهیم، خواهیم داشت:



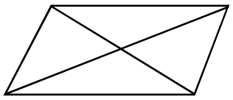
$$\left.\begin{aligned} CM=MD \\ AM=MB \\ (\text{متقابل به راس})\ \widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}=\overset{\Delta}{BMC} \Rightarrow S_{ABC}-S_{ACD}$$

$\rightarrow$ برابر اجزای متناظر: $AD=BC=۷۶$

با توجه به این‌که بین اضلاع مثلث ACD رابطهٔ فیثاغورس برقرار است، بنابراین می‌توان گفت این مثلث در رأس A قائمه است.

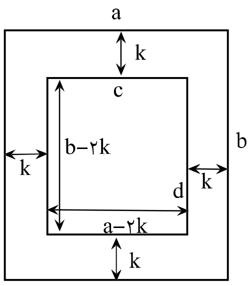
$$S_{ACD}=\frac{AD\times AC}{۲}=\frac{\sqrt{۶}\times ۲}{۲}=\sqrt{۶}$$

۶ گزینهٔ «۲» هر ۴ مثلث به وجود آمده مساحت‌های برابر دارند. در ضمن در هر مثلث با اضلاع a و b که زاویه بین آن‌ها α باشد مساحت با $\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ برابر است.



$$\text{مساحت} = ۴(\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۴\times \sin ۱۳۵) = ۲۴\sqrt{۲}$$

۷ گزینهٔ «۱» با توجه به شکل داریم:



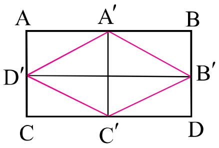
$$\begin{cases}\text{محیط اتاق}: (a+b)\times ۲ = ۲۰\\ \text{مساحت اتاق}: ab = ۲۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=۱۰\\ ab=۲۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۴\\ b=۶\end{cases}$$

$$\text{محیط قالی} = (a-۲k+b-۲k)\times ۲ = ۱۲ \Rightarrow a+b-۴k = ۶ \Rightarrow k = ۱$$

$$c = a-۲k = ۴-۲ = ۲ \quad , \quad d = b-۲k = ۶ = ۲ = ۴$$

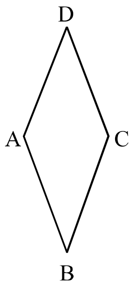
$$\text{مساحت قالی} = cd = ۴\times ۲ = ۸$$

۸ گزینهٔ «۲»



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD}\text{مستطیل} = a\times b \\ S_{A'B'C'D'}\text{لوزی} = \dfrac{\text{قطر بزرگ}\times\text{قطر کوچک}}{۲} = \dfrac{a\times b}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{لوزی}}} = ۲$$

۹ گزینهٔ «۳» لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است و می‌دانیم مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع، پس ابتدا سینوس زاویه بین دو ضلع را محاسبه می‌کنیم:

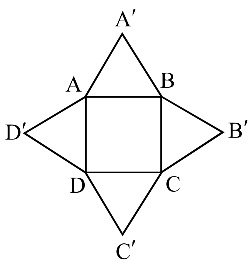


$$\sin A = \sqrt{۱-\cos^۲ A} = \sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow S = AB\times AD\times \sin A = ۵\times ۵\times \frac{۴}{۵} = ۲۰$$

۱۰ گزینهٔ «۲» می‌دانیم اندازه قطر مربع به طول a برابر $\sqrt{۲}a$ است پس:

$$a+\sqrt{۲}a = a(\sqrt{۲}+۱) = ۲+\sqrt{۲} = ۲(\sqrt{۲}+۱) \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^۲ = ۴$$

۱۱ گزینهٔ «۴» می‌دانیم مساحت مربع برابر است با نصف مجذور قطرش:



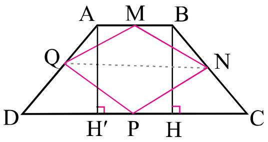
$$BC = x = A'B$$

$$A'B'C'D' \text{ قطر مربع} = A'C' = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}A'B) + BC = (\sqrt{۳}+۱)x = A'B'C'D'$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}+۱)^۲ x^۲}{x^۲} = \frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲+\sqrt{۳}$$

۱۲ گزینهٔ «۳»

می‌دانیم:

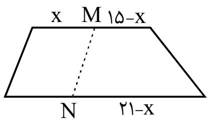


$$Q_N = \frac{۱}{۲}(AB+DC) = \frac{۱}{۲}(۴+۱۲) = ۸$$

$$S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲}MP \times QN = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times ۸ = ۱۶$$

۱۳ گزینهٔ «۲» محیط از ۹ پاره‌خط مساوی تشکیل شده است. اندازه هر پاره‌خط $۲ = \frac{۱۸}{۹}$ و بزرگ‌ترین ذوزنقه از ۸ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. مساحت هر مثلث $\sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس مساحت بزرگ‌ترین ذوزنقه $۸\sqrt{۳}$ است.

۱۴ گزینهٔ «۲» اگر ارتفاع ذوزنقه h فرض شود، داریم:

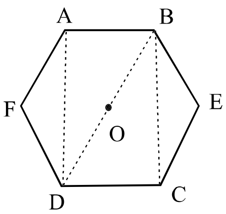


$$x \times h = \frac{۱}{۲}h(۲۱ - x + ۱۵ - x)$$

$$x = ۱۸ - x \Rightarrow x = ۹$$

نقطه N قاعده بزرگ‌تر را به نسبت $\frac{۹}{۱۲}$ یا $\frac{۳}{۴}$ تقسیم کرده است.

۱۵ گزینهٔ «۴» چهار ضلعی ABCD یک مستطیل است.



$$\left.\begin{array}{l} AB = ۲ \\ BD = ۲OB = ۲AB = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow BC = \sqrt{۱۶ - ۴} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

۱۶ گزینهٔ «۱» مثلث سایه زده شده مثلث متساوی‌الاضلاعی است که طول ضلع آن برابر قطر کوچک ۶ ضلعی منتظم است و می‌دانیم قطر کوچک ۶ ضلعی منتظم $\sqrt{۳}$ برابر ضلعش می‌باشد، بنابراین داریم:

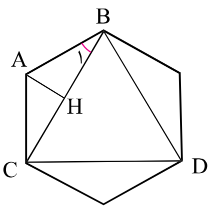
ضلع مثلث $= \sqrt{۳} \times ۴ \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (۴\sqrt{۳})^۲ = ۱۲\sqrt{۳}$

۱۷ گزینهٔ «۴»

مساحت ۶ ضلعی منتظم برابر است با: $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۶ = ۲۴\sqrt{۳}$

۱۸ گزینهٔ «۳»

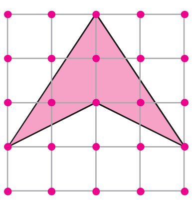
مثلث BCD متساوی‌الاضلاع است. چون $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$ لذا زاویه $B_۱$ برابر ۳۰° است، پس AH نصف AB (وتر) است. لذا $AH = ۲$.



$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۴ + BH^۲ \Rightarrow BH = ۲\sqrt{۳}$$

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow$ هاشور خورده $S = ۸\sqrt{۳}$

۱۹ گزینهٔ «۴»



تعداد نقاط مرزی =۴

تعداد نقاط درونی =۳

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۴}{۲} + ۳ - ۱ = ۴$$

۲۰ گزینهٔ «۱»

ابتدا مساحت قسمت‌های هاشورخورده را محاسبه کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مثلث‌های کوچک } S = \frac{۱۲}{۲} + ۴ - ۱ = ۶ \rightarrow \text{سه‌مثلث} = ۳ \times ۶ = ۱۸ \\ \text{مثلث بزرگ } S = \frac{۲۴}{۲} + (۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹) - ۱ = ۱۲ + ۲۵ - ۱ = ۳۶ \end{array}\right\} \rightarrow \text{هاشور خورده } S_n = ۵۴$$

$$\text{کل } s = \frac{۳۶}{۲} + (۲ \times ۷ + ۲ \times ۹ + ۷ \times ۱۱) - ۱ = ۱۸ + ۱۴ + ۱۸ + ۷۷ - ۱ = ۱۲۶$$

$$\text{درصد هاشور نخورده} = \frac{۱۲۶ - ۵۴}{۱۲۶} \simeq ۰/۵۷ = ۵۷\%$$

توجه: حالا با توجه به درصد پاسخ‌گویی خود در بستهٔ تمرین ۱، از روی یکی از نردبان‌های «نقشه راه دانش‌آموز» انتهای کتاب حرکت کرده تا خود را به خانه جدید برسانید و بعد از آن مطابق دستورالعمل آورده‌شده در آن خانه عمل کنید. توجه کنید که در صورت ورود به بسته تمرین ۲ باز هم باید مطابق دستورالعمل‌های این نقشه عمل کنید. توجه شود که سؤالات متناظر با هر سؤال در هر بسته تمرین در جدولی که در ابتدای پاسخنامه هر بسته تمرین آمده‌است، مشخص شده‌است.

بسته تمرین

۱. مساحت مثلثی به اضلاع ۵ ، ۹ و ۱۰ کدام است؟ (آزمایش سنجش تجربی ۹۴)

۱) $۴\sqrt{۲۸}$ ۲) $۴\sqrt{۳۵}$ ۳) $۶\sqrt{۱۴}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۲. محیط مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد است، مساحت مثلث کدام است؟ (آزمایش سنجش ریاضی ۹۱)

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳. در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو جزء ۴ و ۹ واحدی تقسیم کرده است. مساحت مثلث کدام است؟ (آزمایش سنجش ریاضی ۸۱)

۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۳۹ ۴) ۴۲

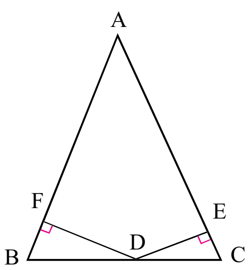
۴. مثلث ABC متساوی‌الساقین است. اگر مساحت مثلث ۶ و طول ضلع AB برابر ۴ باشد، آن‌گاه: (آزاد ریاضی ۸۰)

۱) $DE + DF = ۳$

۲) $DE + DF = \frac{۳}{۲}$

۳) $DE + DF = ۲$

۴) $DE + DF = ۱$



۵. مربعی در داخل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین طوری محاط شده است که دو ضلع آن بر روی دو ضلع زاویه قائم مثلث و یک رأس آن واقع بر وتر مثلث است. مساحت مثلث چند برابر مساحت مربع است؟ (سراسری تجربی ۷۲)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶. اگر طول دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع ثابت و یک زاویه آن تغییر کند، کدام گزینه در مورد محیط و مساحت آن صحیح است؟ (سراسری ریاضی ۷۴)

۱) محیط متغیر - مساحت متغیر ۲) محیط ثابت - مساحت متغیر

۳) محیط متغیر - مساحت ثابت ۴) محیط ثابت - مساحت ثابت

۷. در مربعی به ضلع ۶ واحد، مستطیلی محاط شده است. به طوری که هر رأس مستطیل ضلع مربع را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است. مساحت کوچک‌ترین مستطیل کدام است؟ (آزمایش سنجش تجربی ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۸. مساحت لوزی به ضلع a که یک زاویه ۶۰° دارد، چند برابر شش ضلعی منتظمی به ضلع a است؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۹. اگر $A(۴,۴)$ و $C(۱,۱)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟ (سراسری تجربی ۷۱)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

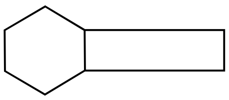
۱۰. در ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه ۶۰ درجه و اندازه ساق کوچک و قاعده کوچک آن به ترتیب ۶ و $۴\sqrt{۳}$ واحد است. مساحت ذوزنقه کدام است؟ (آزمایش سنجش تجربی ۹۱)

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) ۳۶ ۳) $۳۰\sqrt{۳}$ ۴) ۴۲

۱۱. اگر در یک ذوزنقه قاعده بزرگ‌تر دو برابر قاعده کوچک‌تر باشد، خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند سطح ذوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟ (آزاد تجربی ۶۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

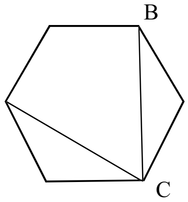
۱۲. بر روی ضلع مستطیلی شش ضلعی منتظم ساخته‌ایم. اگر مساحت شش ضلعی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مستطیل باشد، طول مستطیل چند برابر عرض آن است؟ (آزاد ریاضی ۸۸)



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

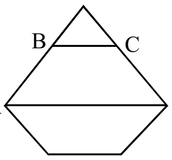
۱۳. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت شش ضلعی منتظم است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

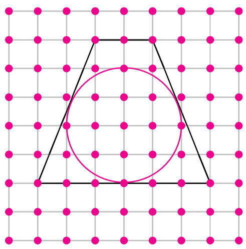
۱۴. در شش ضلعی منتظم اگر امتداد AB و CD یکدیگر را در P قطع کنند، مساحت ۶ ضلعی چند برابر مساحت مثلث PDA است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵. در شکل مقابل مساحت دایره چه کسری از مساحت ذوزنقه است؟



۱) ۴٪ ۲) ۴۵٪

۳) ۵۰٪ ۴) ۵۵٪

.۱ ۱ ۲ ۳ ۴	.۴ ۱ ۲ ۳ ۴	.۷ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴
.۲ ۱ ۲ ۳ ۴	.۵ ۱ ۲ ۳ ۴	.۸ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴
.۳ ۱ ۲ ۳ ۴	.۶ ۱ ۲ ۳ ۴	.۹ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴	.۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۲

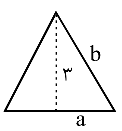
شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۳
۱	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳
۲	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱، ۲، ۳	۱، ۲، ۳
۳	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۴، ۵، ۶	۳، ۴، ۵
۴	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱	۴، ۵، ۶	۳، ۴، ۵
۵	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱	۶، ۷، ۸	۳، ۴، ۵
۶	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲	۹	۶
۷	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱۰، ۱۱	۷
۸	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱۲، ۱۳	۶
۹	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱۲، ۱۳	۶
۱۰	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱۴، ۱۵، ۱۶	۸، ۱۰، ۱۱
۱۱	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۱۴، ۱۵، ۱۶	۸، ۱۰، ۱۱
۱۲	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴	۱۷، ۱۸، ۱۹	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۳	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۳	۱۷، ۱۸، ۱۹	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۴	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴	۱۹، ۲۰، ۲۱	۱۲، ۱۳، ۱۴
۱۵	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۳	۲۲، ۲۳	۱۵

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۳» از دستور هرون داریم:

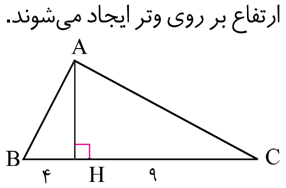
$$\begin{cases} S=\sqrt{P(P-a)(P-c)}=\sqrt{۱۲(۱۲-۱۰)(۱۲-۹)(۱۲-۵)}=\sqrt{۱۲\times ۲\times ۲\times ۳\times ۷}=۶\sqrt{۱۴} \\ P=\dfrac{۱۰+۹+۵}{۲}=۱۲ \end{cases}$$

۲ گزینهٔ «۳» در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده آن را نصف می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} a+b=\dfrac{۱۸}{۲}=۹ \quad (۱) \\ b^۲=a^۲+۹ \Rightarrow (b-a)(b+a)=۹ \end{array}\right\} \to b-a=۱ \xrightarrow{(۱)} \begin{array}{l} b=۵ \\ a=۴ \end{array} \to S=\dfrac{۱}{۲}\times ۸\times ۳=۱۲$$

۳ گزینهٔ «۳» در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین پاره‌خط‌هایی است که توسط این ارتفاع بر روی وتر ایجاد می‌شوند.



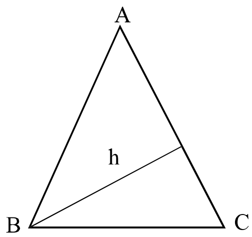
$$AH^۲=BH\times CH=۳۶ \to AH=۶$$

$$S_{ABC}=\dfrac{AH\times BC}{۲}=\dfrac{۶\times ۱۳}{۲}=۳۹$$

۴ گزینهٔ «۱»

مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از ساق‌ها برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

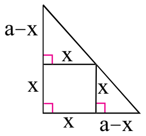
$$S_{ABC} = \frac{h.AC}{۲} = ۶ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{AC} = ۳ \Rightarrow DE + DF = h = ۳$$



۵ گزینهٔ «۱» می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه نصف حاصل‌ضرب دو ضلع زاویه قائمه برابر مساحت مثلث می‌باشد.

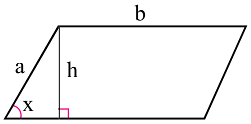
اگر هر ضلع قائم مثلث a فرض شود، مساحت مثلث برابر $\frac{a^۲}{۲} = \frac{a \times a}{۲}$ و مساحت مربع برابر با $x^۲$ می‌باشد. مساحت هر یک از دو مثلث کوچک برابر با $\frac{x(a-x)}{۲}$ می‌باشد. مجموع مساحت‌های مثلث‌های کوچک و مربع برابر با مساحت مثلث بزرگ است پس:

$$\frac{۲x(a-x)}{۲} + x^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ax - x^۲ + x^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow x = \frac{a}{۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{a^۲}{۲}}{\frac{a^۲}{۴}} = ۲$$



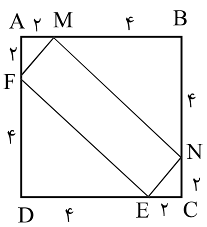
۶ گزینهٔ «۲» اگر a و b اضلاع متوازی‌الاضلاع و x زاویه بین آن دو باشد:

$$\left.\begin{array}{l} S = b \times h \\ \sin x = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \times \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مساحت} = ab\sin x \quad , \quad \text{محیط} = ۲(a+b)$$

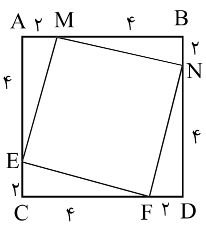


با تغییر x مقدار محیط ثابت می‌ماند در حالی که مساحت آن تغییر می‌کند.

۷ گزینهٔ «۳» اگر MNEF مستطیل به صورت شکل (۱) باشد آن‌گاه MNEF در این حالت مربع به ضلع $\sqrt{۲۰}$ خواهد بود و مساحت آن برابر ۲۰ است و اگر MNEF به صورت شکل (۲) باشد آن‌گاه $MN = ۴\sqrt{۲}$ و $MF = ۲\sqrt{۲}$ و مساحت مستطیل MNEF برابر ۱۶ می‌باشد.



(۲)



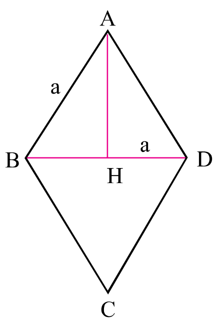
(۱)

۸ گزینهٔ «۳»

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}a^۲}{۲}$$

$$S' = ۶ \times \frac{a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{۲} \text{ شش ضلعی منتظم به ضلع } a \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{۳}}\,\cancel{a^۲}}{\cancel{۲}}}{\frac{۳\cancel{\sqrt{۳}}\,\cancel{a^۲}}{\cancel{۲}}} = \frac{۱}{۳}$$



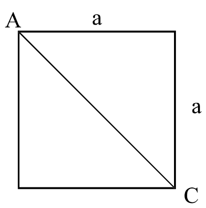
۹ گزینهٔ «۳» چون A و C رئوس مقابل یک مربع می‌باشند پس AC برابر قطر مربع می‌باشد پس:

$$AC = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۴-۱)^۲} = ۳\sqrt{۲}$$

طبق رابطه فیثاغورس طول ضلع مربع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AC^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow ۲a^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ \quad ۱۸ \quad a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

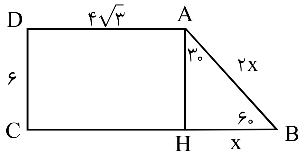
مساحت مربع برابر با $a^۲ = ۹$ بوده است.



۱۰ گزینهٔ «۳» در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. در مثلث ABH داریم:

$$(AB = ۲x\ ,\ BH = x\ ,\ AH = ۶)\ ,\ AB^{۲} = AH^{۲} + HB^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲} = ۳۶ + x^{۲} \to x^{۲} = ۱۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

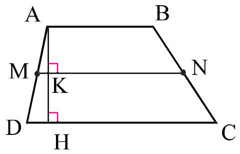
پس $BC = ۶\sqrt{۳}$ و مساحت ذوزنقه:



$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶(۴\sqrt{۳} + ۶\sqrt{۳}) = ۳۰\sqrt{۳}$$

۱۱ گزینهٔ «۳»

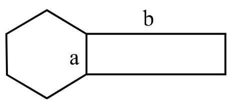
نکته: خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و برابر نصف مجموع دو قاعده است.



$$\left.\begin{aligned} S_{ABMN} &= \frac{۱}{۲}AK(AB + NM) \\ S_{MNCD} &= \frac{۱}{۲}KH(MN + CD) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABMN}}{S_{MNCD}} = \frac{x + \frac{x + ۲x}{۲}}{\frac{x + ۲x}{۲} + ۲x} = \frac{\frac{۵}{۲}x}{\frac{۷}{۲}x} = \frac{۵}{۷}$$

توجه کنید که $AK = KH$ است.

۱۲ گزینهٔ «۴»

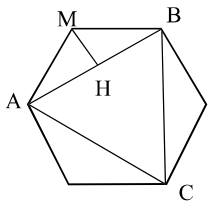


$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{۱}{۳}\ \text{مساحت ۶ ضلعی}$$

$$۶ \times \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۳}ab \Rightarrow \frac{b}{a} = ۱۸\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

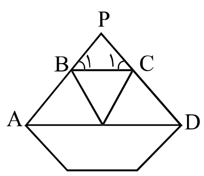
۱۳ گزینهٔ «۳» ارتفاع MH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اندازه زاویه هر ۶ ضلعی منتظم ۱۲۰° است. پس $H\widehat{M}B = ۶۰^{\circ}$، لذا $HB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MB$

پس $AB = \sqrt{۳}MB$ و اگر فرض کنیم $MB = a$ آن‌گاه:



$$\left.\begin{aligned} S_{۲} &= ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = ۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}\ \text{مساحت شش ضلعی منتظم} \\ S_{۱} &= \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}a)^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}\ \text{مساحت مثلث ABC} \end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{S_{۱}}{S_{۲}} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴ گزینهٔ «۴» مثلث BPC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است زیرا $B_{۱} = C_{۱} = ۶۰^{\circ}$.



$$S_{PBC} = \frac{۱}{۴}S_{PAD} = \frac{۱}{۴}S_{۱} \Rightarrow \frac{\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}}{\text{مساحت مثلث PAD}} = \frac{۶S_{۱}}{۴S_{۱}} = \frac{۳}{۲}$$

۱۵ گزینهٔ «۳»

$$\text{مساحت دایره} = \frac{۴}{۲} + ۹ - ۱ = ۱۰$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱۰}{۲} + ۱۶ - ۱ = ۲۰$$

$$\frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت ذوزنقه}} = \frac{۱۰}{۲۰} = ۰/۵ = ۵۰٪$$

بسته تمرین ۳

۱. ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم کرده‌ایم. مساحت یکی از دو مثلث دو برابر مساحت دیگری است. اگر طول این ارتفاع برابر ۴ باشد مساحت مثلث اولیه چقدر است؟ (سراسری تجربی ۷۰)

۱) $۹\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۱۱\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

۲. اگر محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد، مساحت مثلث چند واحد مربع است؟ (سراسری تجربی ۷۵)

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) ۹ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) ۱۲

۳. در مثلث متساوی‌الساقین که طول ساق b و طول قاعده a باشد مساحت برابر است با: (آزاد ریاضی ۶۸)

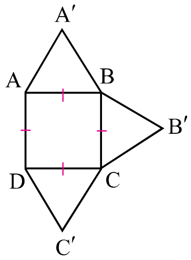
۱) $\frac{b}{۴}\sqrt{۴a^۲+b^۲}$ ۲) $\frac{a}{۴}\sqrt{۴b^۲+a^۲}$

۳) $\frac{b}{۴}\sqrt{۴a^۲-b^۲}$ ۴) $\frac{a}{۴}\sqrt{۴b^۲-a^۲}$

۴. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(A=\frac{\pi}{۲})$ $AC=۲AB$. ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵. روی سه ضلع مربعی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مربع است؟ (آزاد ریاضی ۸۴)



۱) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$

۳) $۴+۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۶. در یک متوازی‌الاضلاع یک ضلع ۳ برابر ضلع دیگر است و خط گذرا بر محل تلاقی قطرها، متوازی‌الاضلاع را به دو ذوزنقه تقسیم می‌کند. اگر نسبت مساحت دو ذوزنقه K باشد، تغییرات K کدام است؟ (آزمایش سنجش تجربی ۸۸)

۱) $K=۱$ ۲) $K=\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}<K<۱$ ۴) $\frac{۲}{۳}<K\leq ۱$

۷. نقاط $A(۳,۳)$، $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۸. در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم. در چهار ضلعی حاصل طول یک ضلع برابر ۴ و یک زاویه ۱۲۰° است. مساحت ذوزنقه چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۶ - صبح)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۹. در داخل مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین بزرگ‌ترین مربع ممکن را قرار می‌دهیم، نسبت مساحت این مربع به مساحت مثلث مفروض چقدر است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰. در ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه نسبت قاعده‌ها $\frac{۲}{۳}$ است. وسط ساق قائم به وسط قاعده کوچک‌تر وصل شده است. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه اصلی است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۶)

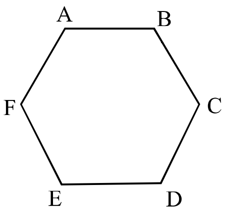
۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۱۱. مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۸ و ۶ واحد و طول ساق $\sqrt{۵}$ چقدر است؟ (آزمایشی سنجش تجربی ۸۴)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۵ ۴) ۱۶

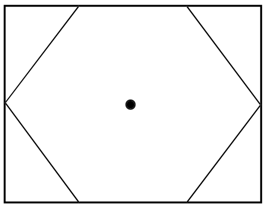
۱۲. در شش ضلعی منتظم شکل، مساحت چهار ضلعی ABDE چند برابر مساحت مثلث BCD است؟ (آزاد ریاضی ۸۹)



۱) ۲ ۲) ۸

۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

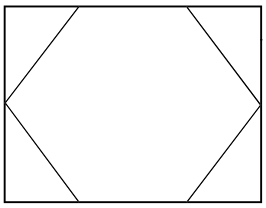
۱۳. در شکل مقابل طول ضلع شش ضلعی منتظم برابر $\sqrt{۲}$ است، مساحت مستطیل کدام است؟ (آزمون‌های ریاضی ۸۵)



۱) ۱۲ ۲) ۶

۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

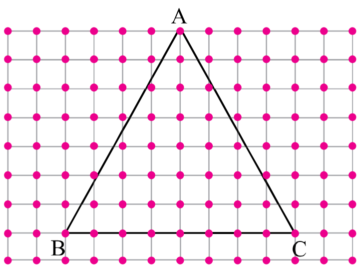
۱۴. در شکل مقابل مساحت شش ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل محیط بر آن است؟ (خارج از کشور سراسری ریاضی ۸۴)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

۱۵. با توجه به شکل زیر مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۵ ۲) ۲۶

۳) ۲۷ ۴) ۲۸

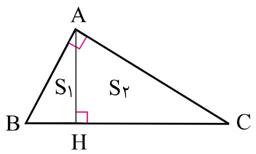
.۱ ۱ ۲ ۳ ۴ .۴ ۱ ۲ ۳ ۴ .۷ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴
.۲ ۱ ۲ ۳ ۴ .۵ ۱ ۲ ۳ ۴ .۸ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴
.۳ ۱ ۲ ۳ ۴ .۶ ۱ ۲ ۳ ۴ .۹ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ .۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۳

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون
۱	مساحت چندضلعی‌های محدب		۴	۱، ۲، ۳
۲	مساحت چندضلعی‌های محدب		۴	۱، ۲، ۳
۳	مساحت چندضلعی‌های محدب		۴	۴، ۵، ۶
۴	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳	۴، ۵، ۶
۵	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱	۶، ۷، ۸
۶	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱	۹، ۱۲، ۱۳
۷	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲	۱۰، ۱۱
۸	مساحت چندضلعی‌های محدب		۴	۱۴، ۱۵، ۱۶
۹	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱	۱۴، ۱۵، ۱۶
۱۰	مساحت چندضلعی‌های محدب		۴	۱۴، ۱۵، ۱۶
۱۱	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲	۱۴، ۱۵، ۱۶
۱۲	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۳	۱۷، ۱۸، ۱۹
۱۳	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۳	۱۷، ۱۸، ۱۹
۱۴	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۲	۱۹، ۲۰، ۲۱
۱۵	نقاط شبکه‌ای و مساحت		۴	۲۲، ۲۳

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۴» با توجه به شکل زیر:



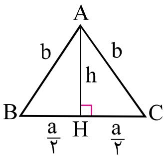
$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{AH \times BH}{۲} \\ S_2 = \dfrac{AH \times CH}{۲} \\ S_2 = ۲S_1 \end{array}\right\} \Rightarrow CH = ۲BH$$

از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است؛ پس:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow \begin{cases} BH \times CH = ۴^۲ = ۱۶ \\ CH = ۲BH \end{cases} \Rightarrow ۲BH^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} BH = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} \\ CH = ۴\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow BC = BH + CH = ۶\sqrt{۲}$$

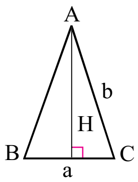
$$S = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۴ \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

۲ گزینهٔ «۴» می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز می‌باشد. لذا $BH=\frac{a}{۲}$. با توجه به شکل زیر:



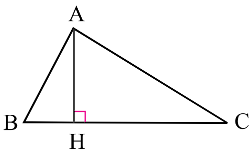
$$\left.\begin{array}{l} ۲b \quad a=۱۸ \\ h^۲+\frac{a^۲}{۴}=b^۲ \\ h=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=۸ \\ b=۵ \end{cases} ,\quad S=\frac{۱}{۲}ah=۱۲$$

۳ گزینهٔ «۴» می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز می‌باشد؛ پس:



$$AH=\sqrt{b^۲-(\frac{a}{۲})^۲}=\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۴}}=\sqrt{\frac{۴b^۲-a^۲}{۴}}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times AH=\frac{۱}{۲}a\times\sqrt{\frac{۴b^۲-a^۲}{۴}}=\frac{۱}{۴}a\sqrt{۴b^۲-a^۲}$$

۴ گزینهٔ «۳»



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^۲=BH\times BC \\ \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow AC^۲=CH\times BC \\ \text{طبق فرض}: AC=۲AB \end{array}\right\} CH\times BC=۴BH\times BC\Rightarrow CH=۴BH$$

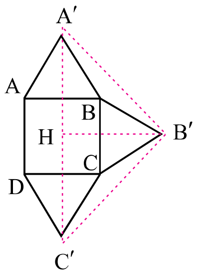
بنابراین خواهیم داشت:

$$BH=\frac{۱}{۵}BC$$

در نتیجه:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}}=\frac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AH\times BH}{۲}}=\frac{BC}{BH}=۵$$

۵ گزینهٔ «۱»



$BC=a$ ضلع مربع

$$B'H=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a+\frac{a}{۲}$$

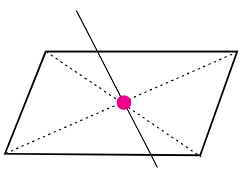
$$A'C'=۲B'H$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'}=\frac{B'H\times A'C'}{۲}=(B'H)^۲=(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲})^۲a^۲$$

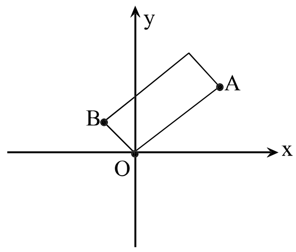
$$S_{ABCD}=a^۲$$

$$\Rightarrow\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲})^۲a^۲}{a^۲}=(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲})^۲=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۴}=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶ گزینهٔ «۱» چون هرقطعه همواره متوازی‌الاضلاع را نصف می‌کند لذا $K=۱$.

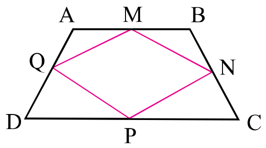


۷ گزینهٔ «۲» با توجه به شکل مساحت مستطیل برابر است با:



$$OA \times OB = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} \times \sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲} = ۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۶$$

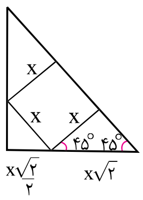
۸ گزینهٔ «۴» اگر وسط‌های اضلاع ذوزنقه متساوی‌الساقین را متوالیاً به هم وصل کنیم لوزی حاصل می‌شود که مساحت آن نصف مساحت چهار ضلعی است.



$$S_{MNPQ} = MN \times NP \times \sin ۶۰ = ۸\sqrt{۳}$$

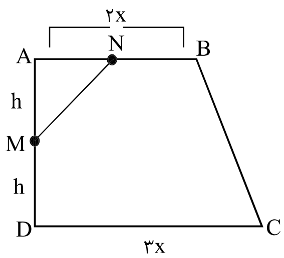
$$S_{ABCD} = ۱۶\sqrt{۳}$$

۹ گزینهٔ «۱» اگر x ضلع مربع باشد داریم:



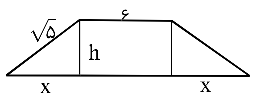
$$\frac{S_{مربع}}{S_{مثلث}} = \frac{x^۲}{\frac{(\frac{x\sqrt{۲}}{۲} + x\sqrt{۲})^۲}{۲}} = \frac{۲x^۲}{۲x^۲(۱+\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{۴}{۹}$$

۱۰ گزینهٔ «۴» فرض کنیم N وسط AB و M وسط AD باشد.



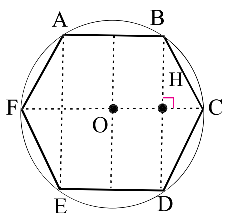
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}h \times x}{\frac{۱}{۲}(۲h)(۲x+۳x)} = \frac{x}{۱۰x} = \frac{۱}{۱۰}$$

۱۱ گزینهٔ «۲» اگر دو ارتفاع ذوزنقه را مطابق شکل رسم کنیم خواهیم داشت:



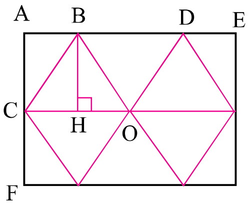
$$\begin{cases} x = \frac{۸-۶}{۲} = ۱ \\ h^۲ = ۵ - ۱ \Rightarrow h = ۲ \end{cases} \Rightarrow S = \frac{۲(۶+۸)}{۲} = ۱۴$$

۱۲ گزینهٔ «۳» دایره محیطی شش ضلعی را در نظر بگیریم. اگر شعاع این دایره را $R = ۱$ فرض کنیم می‌توانیم از نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰° نتیجه بگیریم که:



$$\begin{cases} BD = ۲BH = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \sqrt{۳} \\ AB = ۲OH = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱ \\ CH = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{ABDE} = ۱ \times \sqrt{۳} = \sqrt{۳} \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(\frac{۱}{۲}) \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{ABDE}}{S_{BCD}} = \frac{\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}} = ۴$$

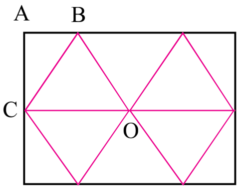
۱۳ گزینهٔ «۳» روش اول: چون شش ضلعی منتظم است مثلث OBC و مثلث‌های دیگر داخل شش ضلعی همگی متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۲}$ هستند. بنابراین داریم:



$$\left.\begin{aligned} AE &= ۲OC = ۲\sqrt{۲} \\ AF &= ۲BH = ۲\times(\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \sqrt{۶} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = (۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}) = ۲\sqrt{۱۲} = ۴\sqrt{۳}$$

توجه کنید در محاسبه بالا از این‌که ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است استفاده شده است.

روش دوم: با توجه به شکل مشخص می‌شود:

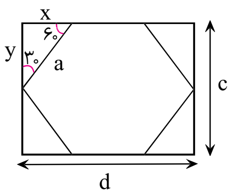


$$\text{مساحت مستطیل} = ۴S_{ABC} + ۶S_{OBC} = ۴(\frac{۱}{۲}S_{OBC}) + ۶S_{OBC} = ۸S_{OBC} = ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۲})^{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

در بالا از این حکم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است، استفاده کرده‌ایم.

نکته: یک شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

۱۴ گزینهٔ «۲» فرض می‌کنیم اندازه هر ضلع شش ضلعی منتظم برابر a باشد در این صورت مساحت شش ضلعی منتظم برابر است با: $S_{۱} = ۶(\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴})$. اما برای محاسبه مساحت مستطیل باید اضلاع آن را به‌دست آوریم و با توجه به این‌که هر زاویه داخلی ۶ ضلعی منتظم ۱۲۰° است، زاویه‌های خارجی برابر ۶۰° است.



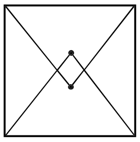
$$x = \frac{a}{۲} \text{ و } y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow \begin{cases} c = ۲y = \sqrt{۳}a \\ d = \frac{a}{۲} + a + \frac{a}{۲} = ۲a \end{cases} \rightarrow S_{۲} = cd = ۲\sqrt{۳}a^{۲} \rightarrow \frac{S_{۱}}{S_{۲}} = \frac{\frac{۶a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}{۲\sqrt{۳}a^{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

۱۵ گزینهٔ «۴»

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۴}{۲} + ۲۲ - ۱ = ۲۸$$

آزمون پایانی

۱. در شکل روبه‌رو، روی دو ضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل، چند برابر ضلع مربع اصلی است؟ (خارج از کشور سراسری ریاضی ۹۲)



۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{3}-1$

۲. در مثلث ABC ($b > c > a$) از سه رأس به موازات اضلاع مقابل خطوطی رسم می‌کنیم تا مثلث NMP حاصل شود. طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث حاصل چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۷۸)

۱) $a + C$ ۲) $2b$ ۳) $a + h + c$ ۴) $2a$

۳. کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد تجربی ۷۱)

۱) مربع، لوزی است که قطرهایش مساویند.

۲) هر چهار ضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند مربع است.

۳) هر متوازی‌الاضلاع که قطرهایش بر هم عمود باشد مربع است.

۴) هر ذوزنقه‌ای که یک زاویه قائم داشته باشد مربع است.

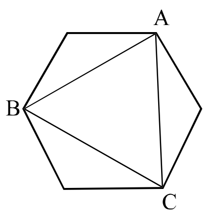
۴. تعداد قطرهای ۱۲ ضلعی منتظم که کوچک‌تر از قطر دایره محیطی آن است، کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۱)

۱) ۴۲ ۲) ۴۴ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۵. نیم‌سازهای زوایای داخلی ذوزنقه‌ای یک چهار ضلعی می‌سازند. این چهار ضلعی: (آزاد ریاضی ۷۶)

۱) مربع است. ۲) محاطی است. ۳) مستطیل است. ۴) لوزی است.

۶. اگر هر ضلع شش ضلعی منتظم برابر $4\sqrt{3}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟ (تجربی ۸۳)



۱) ۳۶

۲) ۲۴

۳) $18\sqrt{3}$

۴) $24\sqrt{3}$

۷. مجموع تعداد اضلاع و قطرهای یک $(n+1)$ ضلعی نصف تعداد قطرهای یک $2n$ ضلعی است. n کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۷)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

۸. کدام‌یک از چهار ضلعی‌های زیر یک متوازی‌الاضلاع را مشخص **نمی‌کند**؟ (آزاد تجربی ۶۸)

۱) چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.

۲) چهار ضلعی که قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند.

۳) چهار ضلعی که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

۴) چهار ضلعی که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

۹. اگر P یعنی «چهار ضلعی ABCD دو قطرش مساوی است» و Q یعنی «چهار ضلعی ABCD مستطیل است» کدام گزاره درست است؟ (سراسری تجربی ۶۵)

۱) P شرط لازم و کافی برای Q است.
۲) P شرط کافی برای Q است.
۳) Q شرط کافی برای P است.
۴) Q شرط لازم برای P است.

۱۰. در مثلث ABC از نقطه D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو را در M و N قطع کند. MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) قطع عمود بر هم
۲) قطر منصف هم
۳) زاویه بین آن‌ها مکمل $\widehat{A}$
۴) عمود منصف هم

۱۱. مجموع تعداد اضلاع و قطرهای یک $n+۱$ ضلعی منتظم نصف تعداد قطرهای یک $۲n$ ضلعی منتظم است. هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم چند درجه است؟ (ریاضی ۸۲)

۱) ۹۰°
۲) ۱۳۵°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۴۴°

۱۲. طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است. نیمساز زاویه‌های مستطیل را رسم کرده‌ایم. محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده درون آن است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$
۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۳. در پنج ضلعی منتظم ABCDE اگر دو قطر BD و CE یکدیگر را در M قطع کنند، چهار ضلعی ABME کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۲)

۱) مربع
۲) مستطیل
۳) لوزی
۴) ذوزنقه متساوی‌الساقین

۱۴. در یک مستطیل با اضلاع ۳ و ۴ از یک رأس عمودی بر قطری که از آن رأس نمی‌گذرد عمود کرده‌ایم. طول پاره‌خط عمود کدام است؟ (ریاضی ۸۲)

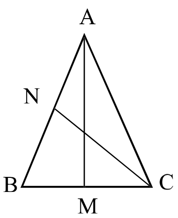
۱) ۲
۲) ۲/۸
۳) ۲/۵
۴) ۲/۴

۱۵. کدام چهار ضلعی الزاماً یک مربع است؟ (سراسری تجربی ۷۱)

۱) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش عمود منصف هم باشند.
۲) مستطیلی که بر یک دایره محیط شود.
۳) لوزی که بر یک دایره محیط شود.
۴) ذوزنقه متساوی‌الساقینی که قطرهایش عمود منصف هم باشند.

۱۶. در شکل زیر طول میانه‌های $CN = ۷/۵$ و $AM = ۹$ می‌باشد و ضلع $BC = ۸$ است. مساحت مثلث ABC چقدر است؟ (آزاد تجربی ۷۱)

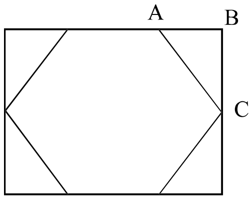
۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶



۱۷. در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه ۳۰ درجه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. نسبت مساحت‌های این دو مثلث کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۶)

۱) ۱ و ۳
۲) ۲ و ۳
۳) ۱ و ۴
۴) ۲ و ۵

۱۸. شش ضلعی منتظم در مستطیل محاط شده است. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت شش ضلعی است؟ (آزاد ریاضی ۸۵)



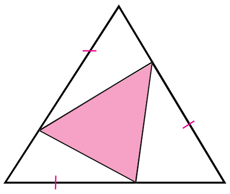
۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۹. یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ۴ واحد قطر یک مربع است. کوتاه‌ترین فاصله رأس دیگر مستطیل از ضلع این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۲۰. هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه زده چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۱. در یک متوازی‌الاضلاع وسط دو ضلع غیر موازی را به هم وصل می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌شود، مساحت قسمت بزرگ‌تر چند برابر مساحت قسمت کوچک‌تر است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۲۲. در یک مربع به طول ضلع ۴ واحد، نقاط B ، C ، D و A بر روی هر یک از اضلاع چنان اختیار شده که فاصله آن نقاط از سر یک قطر مربع برابر واحد است. مساحت چهار ضلعی ABCD چند درصد مساحت مربع است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۲)

۱) ۳۲ ۲) ۳۲/۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷/۵

۲۳. در مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم، مساحت ذوزنقه حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۴. ذوزنقه‌ای به قاعده‌های ۱۵ و ۲۱ واحد را با رسم یک خط به یک متوازی‌الاضلاع و یک ذوزنقه با مساحت‌های مساوی هم تجزیه می‌کنیم. رأس متوازی‌الاضلاع قاعده کوچک‌تر ذوزنقه اصلی را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۲۵. در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین اندازه دو قاعده برابر ۵ و ۹ و طول ساق آن ۶ واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟ (کنکورهای خارج از کشور سراسری تجربی ۸۸)

۱) $۱۴\sqrt{۶}$ ۲) $۲۱\sqrt{۲}$

۳) $۲۱\sqrt{۳}$ ۴) $۲۸\sqrt{۲}$

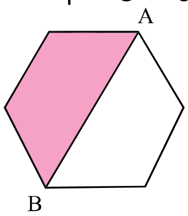
۲۶. قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷. مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع $\sqrt{۱۲}$ چند برابر طول کوچک‌ترین قطر این شش ضلعی است؟ (آزاد ریاضی ۸۹ - صبح)

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۸. شکل مقابل یک شش ضلعی منتظم است. اگر مساحت قسمت هاشور خورده $۴۸\sqrt{۳}$ باشد طول ضلع این شش ضلعی کدام است؟



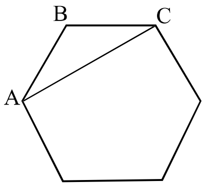
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۱۶

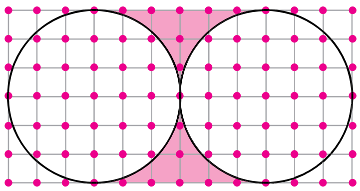
۲۹. اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم ۴ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۳۰. در شکل زیر مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۲/۵

۳) ۱۳ ۴) ۱۴/۵

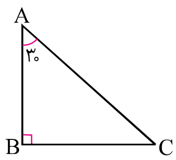
۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۹.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۵.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۰.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۶.	۱ ۲ ۳ ۴
۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۷.	۱ ۲ ۳ ۴
۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۸.	۱ ۲ ۳ ۴
۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۹.	۱ ۲ ۳ ۴
۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۲۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۳۰.	۱ ۲ ۳ ۴

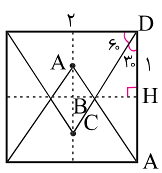
شناسنامه سؤالات آزمون پایانی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	پاسخ
۱	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۴
۲	چند ضلعی‌ها (محدب - مقعر)	۲
۳	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۱
۴	چندضلعی‌های‌منتظم	۳
۵	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۲
۶	چندضلعی‌های منتظم	۱
۷	چند ضلعی‌ها (محدب - مقعر)	۴
۸	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۱
۹	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۳
۱۰	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۴
۱۱	چندضلعی‌های منتظم	۱
۱۲	چندضلعی‌های منتظم	۱
۱۳	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۳
۱۴	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۴
۱۵	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها	۲
۱۶	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۴
۱۷	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۱
۱۸	مساحت چند ضلعی‌های منتظم	۴
۱۹	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۲
۲۰	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۴
۲۱	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۳
۲۲	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۴
۲۳	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۲
۲۴	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۱
۲۵	مساحت چند ضلعی‌های محدب	۴
۲۶	مساحت چند ضلعی‌های منتظم	۳
۲۷	مساحت چند ضلعی‌های منتظم	۴
۲۸	مساحت چند ضلعی‌های منتظم	۲
۲۹	مساحت چند ضلعی‌های منتظم	۱
۳۰	نقاط شبکه‌ای و مساحت	۱

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۴» چون نسبت اضلاع را می‌خواهد پس می‌توانیم ضلع مربع اصلی را هر مقدار دلخواهی در نظر بگیریم، بنابراین آن را به دلخواه برابر ۲ واحد انتخاب می‌کنیم.



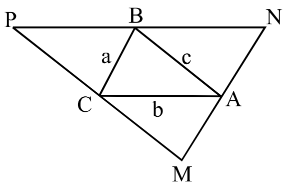


$$\overset{\Delta}{CHD} : \tan 30^\circ = \frac{CH}{DH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{DH=1} CH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \sqrt{3}BC = \sqrt{3}(BH - CH) = \sqrt{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\text{قطر بزرگ لوزی}}{\text{ضلع مربع}} = \frac{2AB}{2} = AB = \sqrt{3} - 1$$

۲ گزینهٔ «۲»



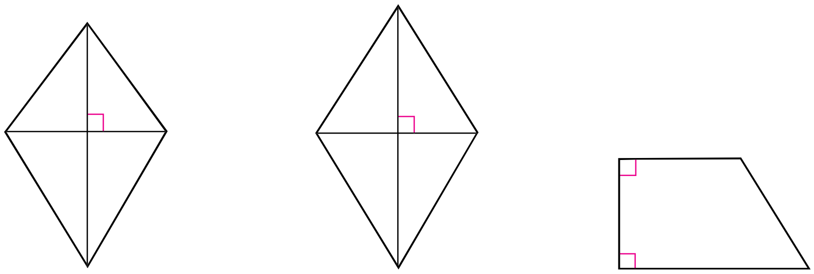
$$\left.\begin{array}{l} BN \parallel AC \\ BC \parallel AN \end{array}\right\} \Rightarrow$$ متوازی‌الاضلاع است. $BNAC \Rightarrow BN = AC \quad (۱)$

به همین ترتیب: متوازی‌الاضلاع است. $ACPB \Rightarrow BP = AC \quad (۲)$

$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow PN = ۲AC = ۲b$

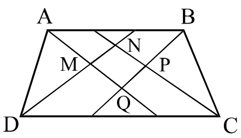
به همین ترتیب می‌توان دید: $MN = ۲BC = ۲a$ و $MP = ۲AB = ۲c$. یعنی طول اضلاع مثلث MNP دو برابر طول اضلاع مثلث ABC است و بزرگ‌ترین ضلع آن برابر PN یا $۲b$ است.

۳ گزینهٔ «۱» در چهار ضلعی که قطرهایش بر هم عمودند، شرط مربع بودن آن است که قطرها یکدیگر را نصف نیز کنند. متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود است، لوزی است. ذوزنقه‌ای که یک زاویه قائمه دارد، ذوزنقه قائم‌الزاویه است.



۴ گزینهٔ «۳» در دوازده ضلعی منتظم تعداد تمام قطرها برابر $۵۴ = \frac{۱۲ \times ۹}{۲}$ است که ۶ قطر آن برابر قطر دایره است. بنابراین $۵۴ - ۶ = ۴۸$ قطر کوچک‌تر است.

۵ گزینهٔ «۲» می‌دانیم نیم‌سازهای دو زاویه مکمل بر هم عمودند.

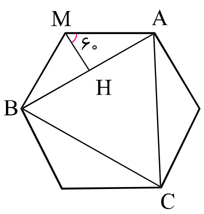


$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{P} = ۹۰^\circ \end{cases}$$

دو رابطه فوق نشان می‌دهد که زوایای روبه‌روی چهار ضلعی MNPQ مکمل یکدیگرند که این شرط محاطی بودن چهار ضلعی است.

نکته: شرط محاطی بودن چهارضلعی، مکمل بودن زوایای روبه‌روی چهارضلعی است.

۶ گزینهٔ «۱» ارتفاع MH را رسم می‌کنیم. اندازه زاویه رأس هر ۶ ضلعی منتظم برابر ۱۲۰° است؛ پس:



$$H\hat{M}A = ۶۰^\circ$$

$$H\hat{M}A = ۶۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} MA \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = \Rightarrow AB = ۲ \Rightarrow$$ محیط مثلث $ABC = ۳۶$

۷ گزینهٔ «۴» می‌دانیم تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است. پس:

$$\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۱-۳) \quad (n+۱) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲} \times ۲n \times (۲n-۳)\right] \Rightarrow$$

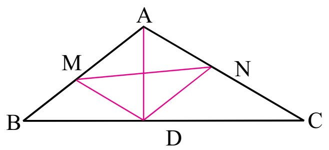
$$(n+۱)(n-۲) + ۲(n+۱) = n(۲n-۳) \Rightarrow n^۲ - n - ۲ + ۲n + ۲ = ۲n^۲ - ۳n \Rightarrow$$

$$n^۲ - ۴n = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۰ & \text{غیر قابل قبول} \\ n = ۴ \end{cases}$$

۸ گزینهٔ «۱» با توجه به تعریف متوازی‌الاضلاع، گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ درست می‌باشند. در گزینه ۱ باید دو ضلع موازی، مساوی هم باشند تا شکل متوازی‌الاضلاع گردد در حالی که این نکته در این گزینه قید نشده است.

۹ گزینهٔ «۳» می‌دانیم که اگر چهار ضلعی مستطیل باشد، دو قطرش برابر خواهند بود ولی عکس این موضوع صادق نیست. لذا گزاره شرطی چنین بیان می‌شود $Q \Rightarrow P$ یعنی Q شرط کافی برای P است.

۱۰ گزینهٔ «۴» در چهار ضلعی AMDN داریم:



$$\left.\begin{matrix} AN \parallel DM \\ AM \parallel DN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AMDN$$ متوازی‌الاضلاع است.

در متوازی‌الاضلاع AMDN ، AD قطر بوده و در ضمن، نیمساز زاویه A نیز می‌باشد. می‌دانیم هرگاه درمتوازی‌الاضلاعی، نیمساز زوایا، قطر ۴ ضلعی باشد، متوازی‌الاضلاع لوزی خواهد شد. بنابراین ۴ ضلعی AMDN لوزی است و در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند.

۱۱ گزینهٔ «۱»

$$n+۱+\frac{(n+۱)(n-۲)}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲n(۲n-۳)}{۲}$$

$$n^۲+n=۲n^۲-۳n \Rightarrow n^۲-۴n=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۰ & \text{غ ق ق} \\ n=۴ \end{cases}$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم}=\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=۹۰^\circ$$

۱۲ گزینهٔ «۱» محیط مربع به وجود آمده برابر است با:

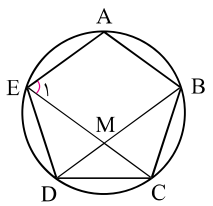
$$\text{محیط}=۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{طول}-\text{عرض})$$

طول مستطیل را ۲x در نظر می‌گیریم. از این رو عرض آن x خواهد شد.

$$\text{محیط}=۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲x-x)=۲\sqrt{۲}x$$

$$\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{محیط مربع}}=\frac{۲(x+۲x)}{۲\sqrt{۲}x}=\frac{۲\times ۳x}{۲\sqrt{۲}x}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳ گزینهٔ «۳» داریم:



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}}{۲} \quad , \quad \hat{E}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}\ \text{محاطی}$$

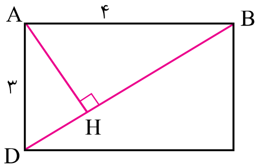
و چون همه کمان‌ها برابرند پس:

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{E}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}}{۲}=\frac{۵\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

در چهار ضلعی ABME مجموع دو زاویه مجاور ۱۸۰ می‌باشد پس ۴ ضلعی متوازی‌الاضلاع خواهد بود. لذا در هر پنج ضلعی منتظم هر قطر، موازی ضلعی از آن پنج ضلعی است که دو رأس آن ضلع در یک طرف قطر قرار دارند.

اما چون ABCDE پنج ضلعی منتظم است از این رو $AE=AB$ یعنی دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع مساوی است؛ از این رو متوازی‌الاضلاع اخیر، لوزی است.

۱۴ گزینهٔ «۴»

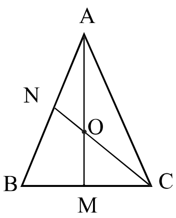


$$BD^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}=۲۵\Rightarrow BD=۵$$

$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB\times AD=\frac{۱}{۲}AH\times BD\Rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}AH\times ۵\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۱۵ گزینهٔ «۲» گزینه یک در لوزی نیز صادق است و الزاماً مربع را تشریح نمی‌کند. در گزینه ۲، مستطیلی که بتواند بر دایره محیط شود باید نیم‌ساز زوایایش هم رأس باشند که در این صورت تبدیل به مربع می‌شود. پس گزینه ۲ مربع را توصیف می‌کند. هر لوزی می‌تواند بر یک دایره محیط شود؛ پس گزینه ۳ نیز صحیح نیست.

۱۶ گزینهٔ «۴» می‌دانیم در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند.

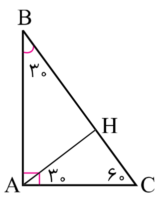


$$\left.\begin{aligned}OM&=\frac{۱}{۳}AM=۳\\CO&=\frac{۲}{۳}CN=۵\\CM&=\frac{۱}{۲}BC=۴\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۵^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}\xrightarrow{\text{طبق عکس فیثاغورس}}\widehat{M}=۹۰^{\circ}$$

بین اضلاع مثلث COM رابطه فیثاغورس برقرار است و در نتیجه مثلث قائمه است. پس:

$AM \Rightarrow$ میانه و ارتفاع است. متساوی‌الساقین است. $\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AM\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۸=۳۶$

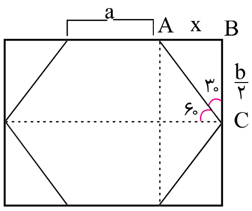
۱۷ گزینهٔ «۱»



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BH}{\frac{۱}{۲}AH\times CH}=\frac{BH}{CH}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}{\frac{۱}{۲}AC}\Rightarrow\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\sqrt{۳}\times\frac{AB}{AC}=\sqrt{۳}\times tg۶۰^{\circ}=\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۳$$

بنابراین نسبت مساحت این دو مثلث برابر یک به سه است.

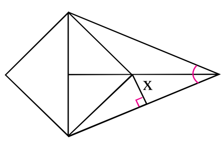
۱۸ گزینهٔ «۴» می‌دانیم ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است:



$$\overset{\Delta}{ABC}=x=\frac{a}{۲}\quad \text{و}\quad \frac{b^{۲}}{۴}+\frac{a^{۲}}{۴}=a^{۲}\Rightarrow\frac{b^{۲}}{۴}=\frac{۳a^{۲}}{۴}\Rightarrow b=\sqrt{۳}a\to\frac{b}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{\frac{a}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}a^{۲}\quad\text{و}\quad S_{\text{شش ضلعی}}=\frac{a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{۲}\times ۶=\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{شش ضلعی}}}=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{۳}}\,\cancel{a^{۲}}}{۸}}{\frac{۳\cancel{\sqrt{۳}}\,\cancel{a^{۲}}}{۲}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۹ گزینهٔ «۲»



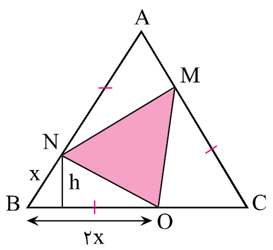
$$\text{فاصله دو راس}=۲\sqrt{۳}-۲\quad\text{و}\quad\text{ارتفاع مثلث}=h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\to h=۲\sqrt{۳}$$

x ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه است. بنابراین:

$$x=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}-۲)\to x=\sqrt{۳}-۱$$

۲۰ گزینهٔ «۴» مساحت مثلث‌های سفید برابر است با:

$$S = ۳ \times \frac{h \times ۲x}{۲} = ۳hx$$



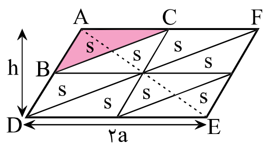
مساحت مثلث‌های هاشور خورده برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{MNO}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - ۳S_{\overset{\triangle}{MCO}} = \frac{۳h \times ۳x}{۲} - ۳hx = \frac{۳hx}{۲} \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۳h \times ۳x}{۲} = \frac{۹hx}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MNO}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۳hx}{۲}}{\frac{۹hx}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

فاصله ۲x برابر فاصله OB است.

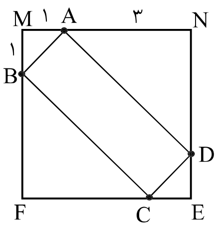
۲۱ گزینهٔ «۳» راه اول: با توجه به شکل اگر وسط اضلاع را به هم وصل کرده و قطرها را رسم کنیم، ۸ مثلث هم مساحت به‌دست می‌آید.

راه دوم:



$$\frac{S_{ADEF}}{S_{ABC}} = \frac{۲a \times h}{\frac{۱}{۲} \times a \times \frac{h}{۲}} = ۸ \Rightarrow \frac{S_{BCFED}}{S_{ABC}} = ۷$$

۲۲ گزینهٔ «۴» مطابق شکل ABCD یک مستطیل است.



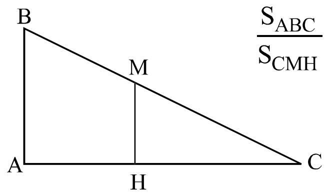
$$AB^۲ = AM^۲ + BM^۲ = ۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۲}$$

$$AD^۲ = AN^۲ + ND^۲ = ۱۸ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۸} \Rightarrow S_{ABCD} = ۶$$

$$S_{MNEF} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNEF}} = \frac{۶}{۱۶} = ۳۷/۵٪$$

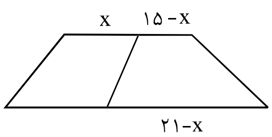
۲۳ گزینهٔ «۲»



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CMH}} = \frac{\frac{۱}{۲}AB \times BC \sin B}{\frac{۱}{۲}CM \times MH \times \sin M} \xrightarrow[\sin \widehat{M} = \sin \widehat{B}]{\widehat{M} = \widehat{B}} \frac{S_{ABC}}{S_{CMH}} = \frac{BH \times BC}{CM \times MH} = \frac{AB \times BC}{\frac{BC}{۲} \times \frac{AB}{۲}} = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} - S_{CMH}} = \frac{۴}{۴ - ۱} \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABMH}} = \frac{۴}{۳}$$

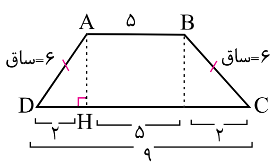
۲۴ گزینهٔ «۱» اگر ارتفاع ذوزنقه h باشد بنا به فرض داریم:



$$x \times h = \frac{(۱۵ - x) + (۲۱ - x)}{۲} \times h \Rightarrow x = ۱۸ - x \rightarrow x = ۹$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵ - x}{x} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

۲۵ گزینهٔ «۴»



$$\text{ارتفاع ذوزنقه} = AH = \sqrt{AD^۲ - DH^۲} = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲} = \frac{(۵ + ۹) \times ۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

۲۶ گزینهٔ «۳»

$$a' = \sqrt{3}a$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}a'^2}{3\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = (\frac{a'}{a})^2 = (\frac{\sqrt{3}a}{a})^2 = 3$$

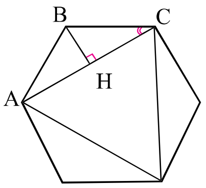
۲۷ گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 18\sqrt{3} \\ L = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S}{L} = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{12}} = 3\sqrt{3}$$

۲۸ گزینهٔ «۲» می‌دانیم مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 6(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)$ است. با توجه به این‌که نصف شکل هاشور خورده می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2) = 48\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

۲۹ گزینهٔ «۱»



$$\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BC = 2$$

$$CH = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

۳۰ گزینهٔ «۱»

$$S_1 = \frac{8}{2} + 2 - 1 = 5 \rightarrow S = 2 \times 5 = 10$$

آیا به تمام سؤالات آزمون پایانی به درستی پاسخ داده‌اید؟

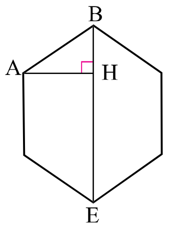
بله به مرحله **آزمون غنی‌سازی** بروید.

خیر متناسب با زیرموضوعات مربوط به سؤالاتی که به درستی پاسخ نداده‌اید، به **تمرینات معلم** خود مراجعه و آن‌ها را حل کنید.

مجدداً سؤالاتی را که در **آزمون پایانی** مشکل داشتید حل کنید.

آزمون غنی‌سازی

۱. در شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ مطابق شکل طول عمودی که از A بر قطر BE رسم می‌شود، چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)



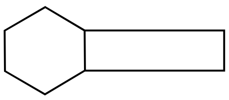
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۲. بر روی ضلع مستطیلی شش ضلعی منتظم ساخته‌ایم. اگر مساحت شش ضلعی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مستطیل باشد، طول مستطیل چند برابر عرض آن است؟ (آزاد ریاضی ۸۸)



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

۳. اگر مجموع زوایای خارجی n ضلعی منتظم را با A_n و تعداد قطرهای آن را با D_n نمایش دهیم، کدام درست است؟ (آزاد ریاضی ۷۶)

۱) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} > A_{۱۹۹}$ ۲) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} < A_{۱۹۹}$

۳) $D_{۲۰۰} < D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$ ۴) $D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$, $A_{۲۰۰} = A_{۱۹۹}$

۴. کدام گزینه درست است؟ (آزاد ریاضی ۷۸)

۱) چهار ضلعی که دو قطر مساوی دارد، مستطیل است.

۲) چهار ضلعی که دو قطر عمود بر هم دارد، لوزی است.

۳) چهار ضلعی که مساحت آن نصف حاصل‌ضرب دو قطر است، لوزی است.

۴) چهار ضلعی که چهار زاویه قائم دارد، مستطیل است.

۵. در مربعی به مساحت ۷۲ واحد مربع، خطی که رأس مربع را به وسط ضلع مقابل وصل کند قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله M تا مرکز مربع کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۴

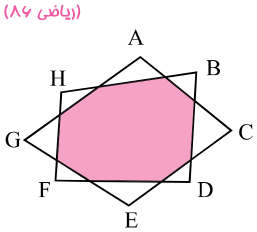
۳) ۲/۵ ۴) ۳

۶. اگر مجموع تعداد اضلاع و قطرهای یک n ضلعی محدب ۱۹۰ باشد، مجموع زوایای داخلی آن چند است؟ (ریاضی ۸۳)

۱) ۴۰ ۲) ۳۲

۳) ۳۶ ۴) ۱۸

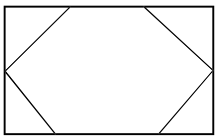
۷. در شکل مقابل (ستاره) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{H}$ برابر است با: (ریاضی ۸۶)



۱) ۱۸۰° ۲) ۳۶۰°

۳) ۷۲۰° ۴) ۹۰۰°

۸. در شکل مقابل محیط شش ضلعی منتظم چند برابر محیط مستطیل محیط بر آن است؟ (کنکورهای خارج از کشور سراسری ریاضی ۹۱)



۱) $۳(\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $۳(۳-۲\sqrt{۲})$

۳) $۲(\sqrt{۳}-۱)$ ۴) $۳(۲-\sqrt{۳})$

۹. کدام گزینه نادرست است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) چهار ضلعی که قطرهای آن مساوی و منصف باشند، مستطیل است.

۲) اگر چهار ضلعی چهار ضلع برابر داشته باشد، لوزی است.

۳) اگر دو ضلع چهار ضلعی هم مساوی و هم موازی باشند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۴) اگر دو ضلع چهار ضلعی با هم و دو قطر آن نیز با هم برابر باشند، چهار ضلعی مستطیل است.

۱۰. در شش ضلعی منتظم به ضلع $۴\sqrt{۳}$ طول کوتاه‌ترین قطر کدام است؟ (کنکورهای خارج از کشور آزاد ریاضی ۸۶)

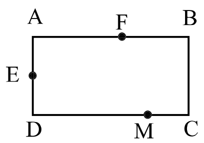
۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد، فاصله تلاقی میانه‌ها از بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۸ ۴) ۲ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱۲. نقاط E و F وسط‌های اضلاع مستطیل و نقطه M روی محیط مستطیل حرکت می‌کند. ماکزیمم مساحت مثلث EFM چقدر است؟

(AB = ۴ و AD = ۲) (آزاد ریاضی ۸۱)



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۶

۱۳. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع مربعی محاط شده است. مساحت مربع چند برابر مساحت مثلث است؟ (آزمایش سنجش ریاضی ۹۱)

۱) $۷\sqrt{۳}-۱۲$ ۲) $۲۸\sqrt{۳}-۴۸$ ۳) $۱۴\sqrt{۳}-۲۴$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}-۱۸$

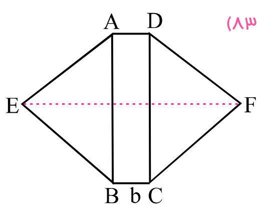
۱۴. از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۵. در مستطیلی به ابعاد $۲\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۶}$ واحد، مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$ (آزمایش سنجش ریاضی ۹۴)

۱۶. بر روی طول‌های مستطیل ABCD دو مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌ایم. اگر نسبت مساحت چند ضلعی AEBCFD به مستطیل ABCD برابر ۳ باشد، طول مستطیل چند برابر عرض آن (b) است؟ (آزاد ریاضی ۸۳)



۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۷. ذوزنقه با قاعده بزرگ‌تر ۱۰ واحد را به یک متوازی‌الاضلاع و یک مثلث تقسیم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث ۷۵ درصد مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، قاعده کوچک‌تر ذوزنقه کدام است؟ (آزمایش سنجش تجربی ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸. از چهار رأس یک چهارضلعی خط‌هایی موازی قطرها رسم می‌کنیم. از تلاقی این خطوط یک چهار ضلعی حاصل می‌شود. نسبت مساحت چهار ضلعی اول به چهار ضلعی حاصل شده، کدام است؟ (سراسری تجربی ۶۲)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۹. اگر وسط‌های اضلاع یک چهار ضلعی محدب را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهار ضلعی دیگری حاصل می‌شود که مساحت آن برابر است با: (آزاد ریاضی ۶۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$ مساحت چهار ضلعی مفروض ۲) $\frac{۲}{۳}$ مساحت چهار ضلعی مفروض

۳) $\frac{۱}{۳}$ مساحت چهار ضلعی مفروض ۴) $\frac{۱}{۴}$ مساحت چهار ضلعی مفروض

۲۰. در یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۳ وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی منتظم دیگری به دست آید، مساحت شش ضلعی حاصل چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

۱) $\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۸}$

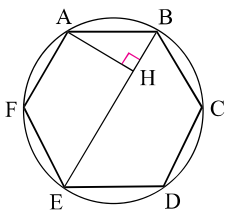
۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴
۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات آزمون غنی‌سازی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	چندضلعی‌های منتظم		۳
۲	چندضلعی‌های منتظم		۴
۳	چندضلعی‌های منتظم		۴
۴	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها		۴
۵	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها		۱
۶	چندضلعی‌ها (محدب - مقعر)		۳
۷	چندضلعی‌ها (محدب - مقعر)		۳
۸	چندضلعی‌های منتظم		۴
۹	چهار ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها		۴
۱۰	چندضلعی‌های منتظم		۲
۱۱	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲
۱۲	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳
۱۳	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲
۱۴	مساحت چندضلعی‌های محدب		۳
۱۵	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲
۱۶	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱
۱۷	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲
۱۸	مساحت چندضلعی‌های محدب		۲
۱۹	مساحت چندضلعی‌های محدب		۱
۲۰	مساحت چندضلعی‌های منتظم		۴

پاسخ‌نامه

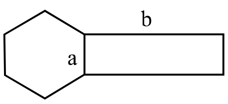
۱ گزینهٔ «۳»



$A\hat{B}H = ۶۰^\circ$ و $\overset{\Delta}{ABH}$ قائم‌الزاویه

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(AB) = ۲\sqrt{۳}$$

۲ گزینهٔ «۴»



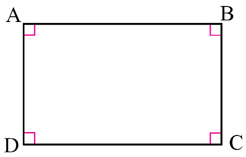
مساحت مستطیل $= \frac{۱}{۳}$ مساحت ۶ ضلعی

$$۶\times\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۳}ab \Rightarrow \frac{b}{a} = ۱۸\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۳ گزینهٔ «۴» می‌دانیم مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی منتظم همواره برابر ۳۶۰°، $\left(n\times\left[\frac{۳۶۰^\circ}{n}\right]\right)$ و تعداد قطرهای آن برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ می‌باشد، بنابراین:

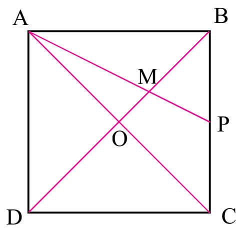
$$A_{۱۹۹} = A_{۲۰۰} \text{ و } \left.\begin{array}{l} D_{۱۹۹} = \frac{۱۹۹\times۱۹۶}{۲} \\ D_{۲۰۰} = \frac{۲۰۰\times۱۹۷}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{۲۰۰} > D_{۱۹۹}$$

۴ گزینهٔ «۴» در مستطیل هر چهار زاویه قائمه است و چهار ضلعی که چهار زاویه قائمه داشته باشد، مستطیل است.



$$\left.\begin{array}{l} A = D = ۹۰^\circ \Rightarrow AB \parallel CD \\ A = B = ۹۰^\circ \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD مستطیل است}$$

۵ گزینهٔ «۱» در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، M مرکز ثقل است.



$$MO = \frac{۱}{۳} BO$$

$$S = ۷۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow BO = ۶ \Rightarrow MO = ۲$$

۶ گزینهٔ «۳»

$$n + \frac{n(n-۳)}{۲} = ۱۹۰ \Rightarrow n^۲ - n = ۳۸۰ \Rightarrow n = ۲۰$$

$$\text{جمع زوایای داخلی} = (n-۲) \times ۱۸۰ \Rightarrow \text{جمع زوایای داخلی} = ۳۶ \times ۹۰^\circ$$

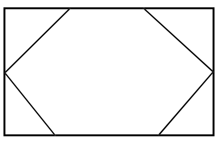
۷ گزینهٔ «۳»

$$\text{در چهار ضلعی ACEG} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} + \hat{E} + \hat{G} = ۳۶۰^\circ$$

$$\text{در چهار ضلعی BDFH} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} + \hat{F} + \hat{H} = ۳۶۰^\circ$$

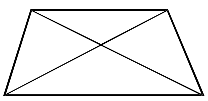
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = ۷۲۰^\circ$$

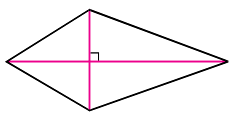
۸ گزینهٔ «۴» اندازه ضلع شش ضلعی را a در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل داریم:



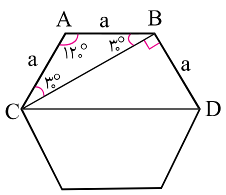
$$\frac{\text{محیط شش ضلعی}}{\text{محیط مستطیل}} = \frac{۶a}{۴a + ۲\sqrt{۳}a} = \frac{۳}{۲ + \sqrt{۳}} = \frac{۳(۲-\sqrt{۳})}{۱} = ۳(۲-\sqrt{۳})$$

۹ گزینهٔ «۴» ذوزنقه متساوی‌الساقین و بعضی کایت‌ها نیز همین ویژگی را دارند.



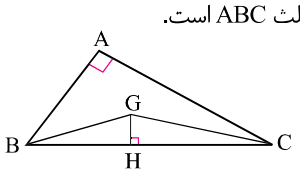


۱۰ گزینهٔ «۲» در شش ضلعی منتظم به ضلع a طول کوتاه‌ترین قطر $a\sqrt{۳}$ و طول بزرگ‌ترین قطر ۲a است، بنابراین:



$$d_۱ = a\sqrt{۳} = (۴\sqrt{۳})(\sqrt{۳}) = ۱۲$$

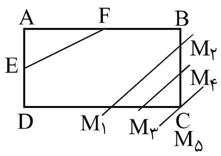
۱۱ گزینهٔ «۲» اگر G محل تلاقی میانه‌های مثلث باشد آن‌گاه مساحت مثلث BGC ثلث مساحت مثلث ABC است.

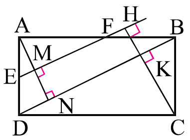


$$S_{BGC} = \frac{۱}{۳} S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(GH \times BC) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲} AB \times AC\right)$$

$$GH \times ۱۰ = \frac{۶ \times ۸}{۳} \Rightarrow GH = ۱/۶$$

۱۲ گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که در مثلث EFM ، ضلع EF ثابت است بنابراین مساحت مورد نظر زمانی ماکزیمم خواهد بود که ارتفاع وارد بر ضلع EF یعنی MH ماکزیمم باشد. چون نقطه M روی خطی موازی EF و به فاصله MH از آن قرار دارد بیشترین مقدار MH زمانی خواهد بود که این خط اضلاع مستطیل را مطابق شکل مقابل تنها در ۱ نقطه قطع کند و آن حالتی است که نقطه M بر رأس C منطبق گردد، در این حالت طول ارتفاع CH برابر است با:





طبق قضیه‌تالس: $\left.\begin{matrix} AF = FB \\ AE = ED \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BD} = \frac{AM}{AN} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} AM = \frac{۱}{۲}AN = MN \\ EF = \frac{BD}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow CH = CK + HK = AN + MN = \frac{۳}{۲}AN$$

در مثلث قائمه ABD، AN ارتفاع وارد بر وتر می‌باشد؛ در نتیجه:

$$AB \times AD = AN \times BD \Rightarrow AN = \frac{AB \times AD}{BD} = \frac{۴ \times ۲}{\sqrt{۲۰}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

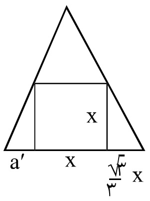
$$\Rightarrow CH = \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{\sqrt{۵}} = \frac{۶}{\sqrt{۵}} \quad , \quad BD = \sqrt{AB^۲ + AD^۲} = \sqrt{۲۰}$$

و نهایتاً داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{CEF}} = \frac{EF \times CH}{۲} = \frac{\frac{DB}{۲} \times CH}{۲} = \frac{\frac{\sqrt{۲۰}}{۲} \times \frac{۶}{\sqrt{۵}}}{۲} = ۳$$

۱۳ گزینهٔ «۲» اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع a و ضلع مربع x باشد، داریم:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{x}{a'} \to a' = \frac{x}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x$$

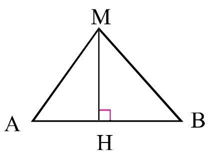


$$x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}x = a \Rightarrow (۳ + ۲\sqrt{۳})x = ۳a \to x = \frac{۳ \times (۳ - ۲\sqrt{۳})a}{(۳ + ۲\sqrt{۳})(۳ - ۲\sqrt{۳})} = (۲\sqrt{۳} - ۳)a$$

مساحت مربع: $S_۲ = (۲\sqrt{۳} - ۳)^۲a^۲$ و مساحت مثلث: $S_۱ = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{(۲\sqrt{۳} - ۳)^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}} = \frac{۱۲ + ۹ - ۱۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}} = \frac{۴ \times ۳(۷ - ۴\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۳}(۷ - ۴\sqrt{۳}) = ۲۸\sqrt{۳} - ۴۸$$

۱۴ گزینهٔ «۳» مساحت و قاعده ثابت است، پس ارتفاع MH ثابت می‌باشد. پس در صورتی کم‌ترین محیط برای مثلث $\overset{\Delta}{MAB}$ ایجاد می‌شود که مثلث متساوی‌الساقین باشد.



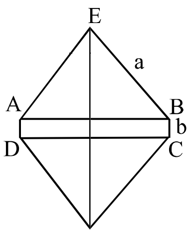
$AH = ۸$ و $MH = ۶ \Rightarrow MA = MB = ۱۰$

محیط $= ۱۰ + ۱۰ + ۱۶ = ۳۶$

۱۵ گزینهٔ «۲» از برخورد نیم‌سازهای مستطیل به اضلاع a و b یک مربع به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)$ به‌دست می‌آید.

$$S_{مربع} = \frac{۱}{۲}(a-b)^۲ = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۶} - \sqrt{۶})^۲ = ۳$$

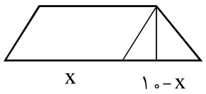
۱۶ گزینهٔ «۱»



$$S_{AEBCFE} = ۳S_{ABCD} \Rightarrow ab + ۲\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۳ab \Rightarrow ab = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \frac{۴b}{\sqrt{۳}} = a \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۷ گزینهٔ «۲»

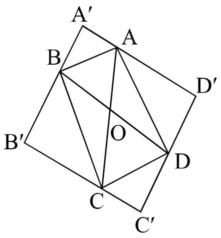


$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}h(10-x)$$

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = hx$$

$$\frac{1}{2}h(10\quad x)\quad \frac{3}{4}(h\quad x)\quad 10\quad x=\frac{3}{2}x \Rightarrow 10=\frac{5}{2}x \rightarrow x=4$$

۱۸ گزینهٔ «۲» فرض کنید ABCD چهار ضلعی اولیه باشد و $A'D' \parallel B'C' \parallel BD$ و $A'B' \parallel D'C' \parallel AC$ باشند، برای چهار ضلعی $OAA'B$ داریم: AABO و OBBC و OCCD و OADD



$$\left.\begin{matrix} AA' \parallel OB \\ BA' \parallel OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow OAA'B \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{1}{2}S_{OAA'B}$$

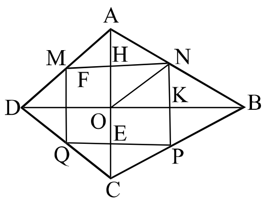
نکته: در هر متوازی‌الاضلاع هر قطر آن را به ۲ مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند.

به همین ترتیب چهار ضلعی‌های $OAD'D$ ، $OCC'D$ و $OBB'C$ متوازی‌الاضلاع خواهند شد. بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} S_{OAB} = \frac{1}{2}S_{OAA'B} \\ S_{OAD} = \frac{1}{2}S_{OAD'D} \\ S_{ODC} = \frac{1}{2}S_{OCC'D} \\ S_{OBC} = \frac{1}{2}S_{OBB'C} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{OAB}+S_{OAD}+S_{ODC}+S_{OBC} = \frac{1}{2}(S_{OAA'B}+S_{OAD'D}+S_{OCC'D}+S_{OBB'C}) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{A'B'C'D}$$

۱۹ گزینهٔ «۱» هرگاه AC و BD اقطار چهار ضلعی بوده و از O به N وصل کنیم، داریم:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} AN = NB \\ AM = MD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طبق رابطه تالس}} AH = HO \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AHN}} = S_{\overset{\Delta}{NHO}} \\ \text{به همین ترتیب}: S_{\overset{\Delta}{NOK}} = S_{\overset{\Delta}{NKB}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{HNKO} = \frac{1}{2}S_{\overset{\Delta}{AOB}}$$



به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix} S_{\overset{\Delta}{HOFM}} = \frac{1}{2}S_{\overset{\Delta}{AOD}} \\ S_{\overset{\Delta}{OEQF}} = \frac{1}{2}S_{\overset{\Delta}{COD}} \\ S_{\overset{\Delta}{OEPK}} = \frac{1}{2}S_{\overset{\Delta}{BOC}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

۲۰ گزینهٔ «۴» اگر وسط‌های یک n ضلعی منتظم را به ترتیب به هم وصل کنیم، مساحت n ضلعی جدید $\cos\frac{2\pi}{n}$ مساحت n ضلعی اولیه است؛ پس:

$$S = 6 \times \frac{3^2 \times \sqrt{3}}{4} \times \cos\frac{2\pi}{6} = \frac{81\sqrt{3}}{8}$$