

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

واحد ۹

اتحاد و تجزیه

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- شناخت اتحاد
- اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد فرعی آن
- اتحاد مربع سه جمله‌ای
- اتحاد مزدوج
- اتحاد یک جمله مشترک و تعمیم آن
- اتحاد مکعب دو جمله‌ای و اتحاد فرعی آن
- اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله
- محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها
- تجزیه چند جمله‌ای‌ها (با اتحادها، فاکتورگیری، دسته‌بندی و افزودن و کاستن)
- خواص نابرابری‌ها و حل نامعادلات
- حل دستگاه‌های نامعادلات
- اتحاد بسط دو جمله‌ای - اتحادهای اوپلر و لاگرانژ

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

به تساوی‌های زیر دقت کنید:

$$25 - 45 = 16 - 36$$

$$5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} = 4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2}$$

$$5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = 4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \frac{81}{4}$$

$$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2}$$

$$5 = 4$$

علت این تناقض چیست؟



	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$$a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

پیش آزمون



۱- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد نیست؟

(۱) $8x^4b^5 - 9x^4b^5 = -x^4b^5$ (۲) $(-\frac{5}{4}x^3)(\frac{1}{10}x^2) = -\frac{1}{4}x^5$

(۳) $-4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^3 = -6a^2bz^4$ (۴) $(-3a^2b^4)(4ab^2c)(3a^2bc^2) = -36a^5b^6c^3$

(آزمون ورودی)

۲- کدام گزینه را در مربع قرار دهیم تا تساوی $a^2 + b^2 - \square = 2(a+b)$ برقرار شود؟

(۱) $4ab$ (۲) $(a+b)^2$ (۳) $a^2 + b^2 + 4ab$ (۴) $4a^2b^2$

(انرژی اتمی)

۳- حاصل عبارت $(x-1)^2 + 2(x-1) + 1$ کدام است؟

(۱) x^2 (۲) $(x-1)^2$ (۳) $(x+1)^2$ (۴) 1

۴- اگر $a+b=2$ و $ab=-35$ باشد، کدام گزینه است؟

(۱) 33 (۲) -70 (۳) 74 (۴) 70

۵- اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{21}$ باشد، مقدار عبارت $a^2 + \frac{1}{a^2}$ کدام است؟

(۱) 19 (۲) -19 (۳) 23 (۴) -23

۶- اگر مجموع دو عدد 10 و تفاضل آن‌ها 6 باشد، حاصل ضرب آن دو چند است؟

(۱) 34 (۲) 16 (۳) -16 (۴) -34

۷- اگر $A = 3x + 2y$ و $B = 3x - 2y$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام گزینه است؟

(۱) $2(3x^2 + 2y^2)$ (۲) $2(9x + 4y)$ (۳) $18x + 8y$ (۴) $2(9x^2 + 4y^2)$

۸- ساده شده عبارت $(2a^2 - b^2 - c^2)^2$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $4a^4 - b^4 - c^4$ (۲) $4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$

(۳) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$ (۴) $4a^4 + b^4 + c^4$

۹- اگر y وارون x باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ کدام است؟ ($x, y \neq 0$)

(۱) $2x^2$ (۲) $x^2 - y^2$ (۳) $2y^2$ (۴) $x^2 + y^2$

(سرآسری فنی و حرفه‌ای)

۱۰- حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ کدام است؟

(۱) $(a^2+1)^2$ (۲) $(a+1)^4$ (۳) $(a^2+3a+1)^2$ (۴) $(a^2+a+1)^2$

۱۱- حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x-4)$ کدام گزینه است؟

(۱) $x^3 + x^2 - 14x - 24$ (۲) $x^3 + x - 14$

(۳) $x^3 + x^2 - 14x^2 - 24$ (۴) $x^3 - x^2 + 14x + 24$

۱۲- اگر $x+y=20$ و $x^2 + y^2 = 13 + xy$ باشد، $x^3 + y^3$ کدام است؟

(۱) $260 - 20 \cdot xy$ (۲) 260 (۳) 13 (۴) 20

۱۳- ساده شده عبارت $(12yx + 9x^2 + 16y^2)(3x - 4y) + 64y^3 + 8x^3$ کدام گزینه است؟

(۱) $35x^3$ (۲) x^3 (۳) $128y^3 + x^3$ (۴) $48y^3 - x^3$

۱۴- عبارت جبری $(x+1)^3$ دارای چند جمله است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

۱۵- در ساده شده عبارت $(3x-2y)^3$ مجموع ضرایب عددی چند جمله‌ای، برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۹

(المپیاد ریاضی)

۱۶- حاصل ضرب دو عدد حقیقی ۱ و مجموع آن‌ها ۳ است. مجموع توان‌های سوم آن‌ها چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۱۷- اگر $ab = ۴۵$ و $a - b = ۱۰$ باشد، آن‌گاه $a^3 - b^3$ کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۵۰ (۲) -۳۵۰ (۳) ۲۳۵۰ (۴) -۲۳۵۰

(آزاد تهرانی)

۱۸- حاصل عبارت ۹۹۹×۱۰۰۱ برابر است با:

- (۱) $۱۰^۶ + ۱$ (۲) ۹×۱۰^۶ (۳) $۱۰^۶ - ۱$ (۴) $۱۰^۹ - ۱$

(آزاد تهرانی)

۱۹- مقدار عددی عبارت $A = (۲+۱)(۲^۲+۱)(۲^۴+۱)...(۲^{۶۴}+۱)$ برابر است با:

- (۱) $۲^{۲۵۶} + ۱$ (۲) $۲^{۱۲۸} + ۱$ (۳) $۲^{۱۲۸} - ۱$ (۴) $۲^{۲۵۶} - ۱$

۲۰- اگر عبارت جبری $۱۸a^۴b^۲c^۲ + ۱۲a^۳b^۲c^۴ + ۲۴a^۴b^۴c^۲$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، یکی از این دو عبارت کدام است؟

- (۱) $۲abc$ (۲) $۶a^۲b^۲c^۲$ (۳) $۶a^۲b^۲c^۲ - ۴$ (۴) $۳a^۲c^۲ - ۲b^۲c^۲$

(تیزهوشان)

۲۱- اگر $x - y = ۷$ باشد، حاصل عبارت $۷x^۲ + ۳y^۲ - xy - ۴x^۲ - ۵xy$ چقدر است؟

- (۱) ۱۴۷ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱ (۴) -۱۲۰

(کنکور آزمایشی انسانی)

۲۲- در تجزیه عبارت $x^{۱۶} - y^۸$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $x^۲ + y$ (۲) $x^۴ + y$ (۳) $x^۸ + y^۴$ (۴) $x^۲ - y$

(کنکور قارچ از کشور انسانی)

۲۳- عبارت $۶x^۲ - ۶x - ۳۶$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $x - ۲$ (۲) $x - ۶$ (۳) $x - ۳$ (۴) $x - ۴$

(کنکور آزمایشی انسانی)

۲۴- در تجزیه عبارت $۸x^۲ + ۱۰x - ۳$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $۴x + ۳$ (۲) $۲x - ۱$ (۳) $۸x - ۱$ (۴) $۲x + ۳$

(آزاد انسانی)

۲۵- اگر $a + b = ۱$ و $a^۲ + b^۲ = ۵$ باشد، $a^۳ + b^۳$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸

(آزاد تهرانی)

۲۶- اگر $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y + ۲ = ۰$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $x^۲ + y^۲ = ۱$ (۲) $x^۲ + y^۲ = x + y$ (۳) $x^۲ + y^۲ = ۰$ (۴) $x^۲ + y^۲ = ۲x + ۲y + ۲$

۲۷- تجزیه شده عبارت $a^۴ + b^۴ + c^۴ - ۲a^۲b^۲ - ۲a^۲c^۲ - ۲b^۲c^۲$ شامل کدام عبارت است؟

- (۱) $a - b - c$ (۲) $-a - b$ (۳) $۲a - b - c$ (۴) $-a - b - c$

(سراسری فنی و حرفه‌ای)

۲۸- اگر $a > b > ۰$ ، آن‌گاه کدام نامساوی درست است؟

- (۱) $\frac{-1}{a} > \frac{-1}{b}$ (۲) $-a > -b$ (۳) $b - a > ۰$ (۴) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(سراسری انسانی)

۲۹- جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

$x < \frac{5}{4}$ (۴)

$x > \frac{7}{6}$ (۳)

$x > \frac{3}{4}$ (۲)

$x < \frac{2}{3}$ (۱)

(کنکور آزاد)

۳۰- جواب دستگاه نامعادلات زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x-1}{6} \\ \frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{3} \end{cases}$$

$-\frac{3}{2} < x < 1$ (۲)

$1 < x < \frac{3}{2}$ (۴)

$-\frac{3}{2} < x < -1$ (۱)

$-1 < x < \frac{3}{2}$ (۳)

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۷
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۸
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۹
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۳۰

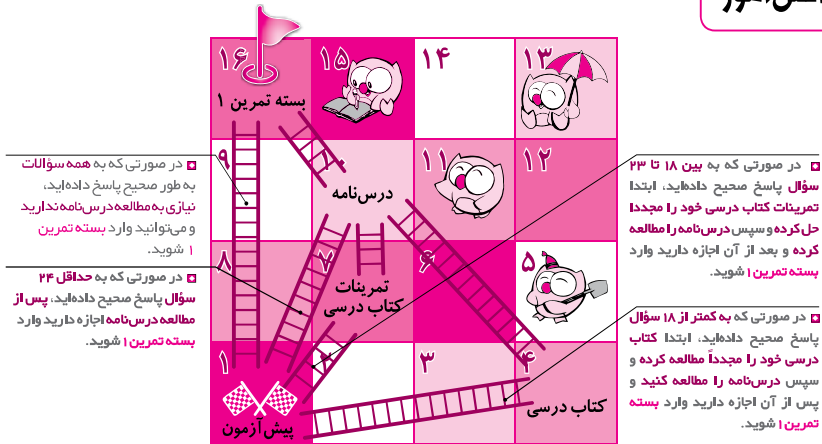
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۱۷
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۱۸
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۱۹
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۲۰
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۲۱
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۲۲
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۲۳
- ۳ ۳ ۲ ۱ -۲۴

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۹
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۰
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۱
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۲
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۳
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۴
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۶

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۳
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۴
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۶
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۷
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۸

توجه: حالا با توجه به تعداد سؤالاتی که پاسخ صحیح داده‌اید، از یکی از نردبان‌های نشان داده شده در نقشه بالا بروید تا به خانه بعدی برسید و به مطالعه عنوان آمده در آن خانه بپردازید.

نقشه راه دانش آموز



شناسنامه سؤالات پیش‌آزمون

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	شناخت اتحاد	۳	۳	۱۶	اتحاد فرعی مکعب دو جمله‌ای	۲	۲
۲	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۳	۳	۱۷	اتحاد فرعی مکعب دو جمله‌ای	۳	۳
۳	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۱	۳	۱۸	محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها	۳	۳
۴	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۳	۳	۱۹	محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها	۳	۳
۵	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۳	۲	۲۰	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۲	۲
۶	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۲	۱	۲۱	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۱	۱
۷	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۴	۲	۲۲	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲
۸	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۲	۳	۲۳	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	۳
۹	اتحاد مزدوج	۲	۴	۲۴	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۴	۴
۱۰	اتحاد یک جمله مشترک	۳	۳	۲۵	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	۳
۱۱	اتحاد یک جمله مشترک و تعمیم آن	۱	۲	۲۶	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با دسته‌بندی	۲	۲
۱۲	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۲	۱	۲۷	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۱	۱
۱۳	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۱	۱	۲۸	خواص نابرابری‌ها	۱	۱
۱۴	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۲	۴	۲۹	حل نامعادلات	۴	۴
۱۵	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۱	۲	۳۰	حل دستگاه‌های نامعادلات	۲	۲

درس‌نامه



در واحد عبارت‌های جبری به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها اشاره کردیم. در این بخش نیز در مورد به توان رساندن دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها، اتحادهایی را بیان خواهیم کرد.

اتحاد

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

توجه: اتحادها به ازای تمام مقادیر متغیرهایشان برقرار هستند در حالی که معادلات جبری به ازای بعضی از مقادیر متغیرهایشان برقرار می‌باشند. **خاصیت اتحادها:** در هر اتحاد، ضرب‌های جملات هم‌درجه در دو طرف اتحاد با هم برابر هستند.

۱- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد نیست؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 8x^4b^5 - 9x^4b^5 &= -x^4b^5 & (-\frac{5}{4}x^3)(\frac{1}{10}x^2) &= -\frac{1}{4}x^5 \\ (2) \quad (-3a^4b^2)(4ab^2c)(3a^2bc^2) &= -36a^5b^4c^3 & (-\frac{5}{4}x^3)(\frac{1}{10}x^2) &= -\frac{1}{4}x^5 \\ (3) \quad -4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^3 &= -6a^2bz^3 & & \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۳» پس از ساده کردن گزینه‌ها و با توجه به خاصیت اتحاد به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

(۱) اتحاد است. $\Rightarrow 8x^4b^5 - 9x^4b^5 = -x^4b^5 \Rightarrow -x^4b^5$
جملات متشابه

(۲) اتحاد است. $\Rightarrow (-\frac{5}{4}x^3)(\frac{1}{10}x^2) = -\frac{1}{4}x^5 \Rightarrow (-\frac{5}{4} \times \frac{1}{10})x^5 = -\frac{1}{4}x^5$

(۳) اتحاد نیست. $\Rightarrow -4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^3 = a^2bz^4 - 7a^2bz^3 \neq -6a^2bz^3$
جملات متشابه

ضرایب جملات a^2bz^3 و a^2bz^4 در دو طرف تساوی یکسان نمی‌باشند.

(۴) اتحاد است. $\Rightarrow (-3a^4b^2)(4ab^2c)(3^2bc^2) = -36a^5b^4c^3$

اتحادهای مهم جبری

۱- اتحاد مربع دوجمله‌ای

(الف) مربع مجموع دو جمله: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\begin{pmatrix} a & + & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{pmatrix}$$

دومی به توان ۲ دو برابر اولی در دومی اولی به توان ۲ جمله دوم جمله اول

۲- کدام گزینه را در مربع قرار دهیم تا تساوی $2(a+b)^2 - \square = a^2 + b^2$ برقرار شود؟

(۱) $4ab$ (۲) $(a+b)^2$ (۳) $a^2 + b^2 + 4ab$ (۴) $4a^2b^2$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 2(a+b)^2 - \square &= a^2 + b^2 \Rightarrow 2(a^2 + 2ab + b^2) - \square = a^2 + b^2 \Rightarrow 2a^2 + 4ab + 2b^2 - \square = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow -\square &= -2a^2 + a^2 - 2b^2 + b^2 - 4ab \Rightarrow \square = a^2 + b^2 + 4ab \end{aligned}$$

(b) مربع تفاضل دو جمله: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 جمله اول جمله دوم اولی به توان ۲ دو برابر اولی در دومی دومی به توان ۲

۳- حاصل عبارت $(x-1)^2 + 2(x-1) + 1$ کدام است؟

(انرژی اتمی)

- (۱) x^2 (۲) $(x-1)^2$ (۳) $(x+1)^2$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اتحاد (مربع تفاضل دو جمله) خواهیم داشت:

$$(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = x^2$$

اتحادهای فرعی مربع دوجمله‌ای

از اتحادهای نوع اول و دوم مربع دوجمله‌ای می‌توان اتحادهای دیگری را نتیجه گرفت که در این قسمت بیان می‌کنیم:

فرعی (۱): $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که مجموع و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و مجموع مربعات آن‌ها را بخواهند.

۴- اگر $a+b=2$ و $ab=-35$ باشد، a^2+b^2 کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۳ (۲) -۷ (۳) ۷۴ (۴) ۷۰

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد فرعی (۱) داریم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (2)^2 - 2(-35) = 4 + 70 = 74$$

فرعی (۲): $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که تفاضل و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و مجموع مربعات آن‌ها را بخواهند.

۵- اگر $a - \frac{1}{a} = -\sqrt{21}$ باشد، مقدار عبارت $a^2 + \frac{1}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) -۱۹ (۳) ۲۳ (۴) -۲۳

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اتحاد فرعی (۲) داریم:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(a\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (-\sqrt{21})^2 + 2 = 21 + 2 = 23$$

فرعی (۳): $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

۶- اگر مجموع دو عدد ۱۰ و تفاضل آن‌ها ۶ باشد، حاصل ضرب آن دو چند است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۱۶ (۳) -۱۶ (۴) -۳۴

پاسخ: گزینه «۲»

$$a+b=10 \text{ و } a-b=6 \xrightarrow{\text{اتحاد فرعی (۳)}} 10^2 - 6^2 = 4ab \Rightarrow 100 - 36 = 4ab \Rightarrow ab = \frac{64}{4} = 16$$

فرعی (۴): $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

۷- اگر $A = 3x + 2y$ و $B = 3x - 2y$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام گزینه است؟

- (۱) $2(3x^2 + 2y^2)$ (۲) $2(9x + 4y)$ (۳) $18x + 8y$ (۴) $2(9x^2 + 4y^2)$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگذاری A و B و استفاده از اتحاد فرعی ۴ داریم:

$$A^2 + B^2 = (3x + 2y)^2 + (3x - 2y)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد فرعی (۴)}} 2((3x)^2 + (2y)^2) = 2(9x^2 + 4y^2)$$

۲- اتحاد مربع سه جمله‌ای

اگر مجموع سه عدد حقیقی a ، b و c را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

۸- ساده شده عبارت $(2a^2 - b^2 - c^2)^2$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $4a^4 - b^4 - c^4$ (۲) $4a^4 - b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$

(۳) $4a^2 - b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$ (۴) $4a^4 + b^4 + c^4$

پاسخ: گزینه «۲» باید دقت کرد که در اتحاد مربع سه جمله‌ای، علامت منفی عددها و جمله‌ها را هنگام به کار بردن، با متغیرها در نظر می‌گیریم.

$$(2a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2a^2)^2 + (-b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2(2a^2)(-b^2) + 2(2a^2)(-c^2) + 2(-b^2)(-c^2)$$

$$= 4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$$

۳- اتحاد مزدوج

با به دست آوردن حاصل ضرب دو جمله‌ای‌های $(a+b)(a-b)$ خواهیم داشت:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

\downarrow جمله اول
 \downarrow جمله دوم
 \downarrow اولی به توان ۲
 \downarrow دومی به توان ۲

۹- اگر y وارون x باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ کدام است؟ ($x, y \neq 0$)

(۱) $2x^2$ (۲) $x^2 - y^2$ (۳) $2y^2$ (۴) $x^2 + y^2$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی بیان می‌کنیم y وارون x است، یعنی می‌توان $x = \frac{1}{y}$ یا $y = \frac{1}{x}$ در نظر گرفت. اکنون با جایگذاری y به جای $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ به جای x در پرانتز اول و با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) \stackrel{\text{جایگذاری}}{=} (\frac{1}{y} - y)(\frac{1}{y} + y) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\frac{1}{y})^2 - y^2 = x^2 - y^2$$

۴- اتحاد یک جمله مشترک

اگر دو عبارت دو جمله‌ای با جمله مشترک x را با هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (a \times b)$$

\uparrow جمله مشترک
 \uparrow جمله مشترک
 \downarrow جمله غیر مشترک
 \downarrow جمله غیر مشترک

یا به بیان کلامی:

$$(x+a)(x+b) = (\text{جمله مشترک}) + (\text{جمع جمله‌های غیر مشترک}) + (\text{جمله مشترک})^2$$

۱۰- حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ کدام است؟

(۱) $(a^2+1)^2$ (۲) $(a+1)^4$ (۳) $(a^2+3a+1)^2$ (۴) $(a^2+a+1)^2$

پاسخ: گزینه «۳» با جابه‌جایی عبارت‌ها و استفاده از اتحاد یک جمله مشترک داریم:

$$a(a+3)(a+1)(a+2)+1 \Rightarrow (a^2+3a)((a^2+3a)+2)+1 = (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1$$

اتحاد مربع دو جمله
اتحاد یک جمله مشترک

تعمیم اتحاد یک جمله مشترک

اگر سه عبارت دو جمله‌ای با جمله مشترک x را با هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

۱۱- حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x-4)$ کدام گزینه است؟

(۱) $x^3 + x^2 - 14x - 24$ (۲) $x^2 + x - 14$
 (۳) $x^3 + x^2 - 14x^2 - 24$ (۴) $x^3 - x^2 + 14x + 24$

پاسخ: گزینه «۱»
 $(x+2)(x+3)(x-4) = x^3 + (2+3-6)x^2 + (2 \times 3 + 2 \times (-4) + 3 \times (-4))x + (2 \times 3 \times (-4))$
 $= x^3 + x^2 - 14x - 24$

۵- اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله (اتحاد چاق و لاغر!)

الف) اتحاد مجموع مکعب دو جمله $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۱۲- اگر $x+y=20$ و $x^2+y^2=13+xy$ باشد، x^3+y^3 کدام است؟

(۱) $260-20xy$ (۲) 260 (۳) 13 (۴) 20

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از صورت مسئله داریم:
 $x^2+y^2=13+xy \Rightarrow x^2+y^2-xy=13$ (۱)
 اکنون از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم: $x^3+y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy) \xrightarrow{\text{جایگذاری (۱)}} x^3+y^3 = 20 \times 13 = 260$

ب) اتحاد تفاضل مکعب دو جمله: اگر در اتحاد (۵-الف) در پرانتز اول ضریب b و در پرانتز دوم ضریب ab را قرینه کنیم، داریم:

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

۱۳- ساده شده عبارت $8x^3+64y^3+(3x-4y)(12yx+9x^2+16y^2)$ کدام گزینه است؟

(۱) $35x^3$ (۲) x^3 (۳) $128y^3+x^3$ (۴) $48y^3-x^3$

پاسخ: گزینه «۱» طبق اتحاد تفاضل مکعب دو جمله می‌توان نوشت:
 $8x^3+64y^3+(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$
 $= 8x^3+64y^3+(3x)^3-(4y)^3 = 8x^3+64y^3+27x^3-64y^3 = 35x^3$

۶- اتحاد مکعب دو جمله‌ای

الف) اتحاد مکعب مجموع دو جمله $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(آزمون سئیش)

۱۴- عبارت جبری $(x+1)^3$ دارای چند جمله است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه «۲»
 چهار جمله $\Rightarrow (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

ب) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

۱۵- در ساده شده عبارت $(3x-2y)^3$ مجموع ضرایب عددی چند جمله‌ای، برابر با کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۹

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله داریم:
 $(3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3 = 27x^3 - (3 \times 9 \times 2) \cdot 2y + (3 \times 3 \times 4)(xy^2) - 8y^3$
 $= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \Rightarrow$ مجموع ضرایب $= 27 - 54 + 36 - 8 = 1$

اتحادهای فرعی مکعب دوجمله‌ای

از اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌توان اتحادهای دیگری نتیجه گرفت که در این قسمت بیان می‌کنیم:

$$(۱) \text{ فرعی: } a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که مجموع و حاصل ضرب دو عدد معلوم باشد و مجموع مکعبات آن‌ها را بخواهند.

(المپیاد ریاضی)

۱۶- حاصل ضرب دو عدد حقیقی ۱ و مجموع آن‌ها ۳ است. مجموع توان‌های سوم آن‌ها چقدر است؟

۱ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از اتحاد فرعی (۱) داریم: $xy = 1$ و $x + y = 3 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 27 - 9 = 18$

$$(۲) \text{ فرعی: } a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که تفاضل و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و تفاضل مکعبات آن‌ها را بخواهند.

۱۷- اگر $ab = 45$ و $a - b = 10$ باشد، آن‌گاه $a^3 - b^3$ کدام گزینه است؟

۳۵۰ (۱) -350 (۲) 2350 (۳) -2350 (۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد فرعی (۲) داریم: $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 1000 + 135 \times 10 = 2350$

استفاده از اتحادها برای محاسبه حاصل عبارت‌ها

۱۸- حاصل عبارت 999×1001 برابر است با:

$10^6 + 1$ (۱) 9×10^6 (۲) $10^6 - 1$ (۳) $10^9 - 1$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان با نوشتن اعداد به صورت زیر آن‌ها را به اتحاد مزدوج تبدیل کرد:

$$999 \times 1001 = (1000-1)(1000+1) = 1000^2 - 1^2 = (10^3)^2 - 1 = 10^6 - 1$$

۱۹- مقداری عددی عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$ برابر است با:

$2^{256} + 1$ (۱) $2^{128} + 1$ (۲) $2^{128} - 1$ (۳) $2^{256} - 1$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» اگر A را در $(2-1)$ ضرب کنیم، طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$A = \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}{(2-1)} = \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}{(2^2-1)} = \frac{(2^4-1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}{(2^4-1)} = \dots = \frac{(2^{64}-1)(2^{64}+1)}{(2^{64}-1)} = 2^{128} - 1$$

تجزیه چندجمله‌ای‌ها

برای ساده‌تر شدن عملیات روی چندجمله‌ای‌ها و برای تعیین ریشه‌های یک چندجمله‌ای می‌توان بهترین روش را تجزیه چندجمله‌ای‌ها نامید. تبدیل کردن یک چندجمله‌ای به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای دیگر با درجه کم‌تر، تجزیه آن چندجمله‌ای نامیده می‌شود. تجزیه یک چندجمله‌ای هنگامی کامل است که هر یک از چندجمله‌ای‌های به دست آمده دیگر تجزیه پذیر نباشند.

روش‌های رایج در تجزیه:

الف) فاکتورگیری

ب) اتحادها

پ) دسته‌بندی

ت) افزودن و کاستن

الف) تجزیه به کمک فاکتورگیری

هرگاه در همه جملات یک عبارت جبری، یک عامل مشترک (ب.م.م اعداد یا حروف مشترک با توان کم‌تر) وجود داشته باشد، آن عامل را به عنوان فاکتور در نظر می‌گیریم و پشت پرانتز قرار می‌دهیم و سپس آن چیزی که از هر جمله باقی می‌ماند، را داخل پرانتز با هم جمع می‌کنیم.

؟ ۲۰- اگر عبارت جبری $18a^4b^2c^2 + 12a^2b^2c^4 + 24a^4b^2c^2$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، یکی از

این دو عبارت کدام است؟

- (۱) $2abc$ (۲) $6a^2b^2c^2$ (۳) $6a^2b^2c^2 - 4$ (۴) $3a^2c^2 - 2b^2c^2$

پاسخ: گزینه «۲» در سه عبارت ب.م.م ضرایب عدد ۶ و حروف مشترک با توان کم‌تر a^2, b^2 و c^2 هستند که آن‌ها را به صورت فاکتور در پشت پرانتز می‌نویسیم، پس داریم: $18a^4b^2c^2 + 12a^2b^2c^4 + 24a^4b^2c^2 = 6a^2b^2c^2(3a^2 + 2c^2 + 4a^2b^2)$

ب) تجزیه به کمک اتحادها

با بررسی برخی از چندجمله‌ای‌ها معلوم می‌شود که شرایط یکی از اتحادهای جبری در آن برقرار است. بنابراین تجزیه این گونه از چندجمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد انجام می‌دهیم.

* در اصل تجزیه عملیاتی در جهت عکس اتحاد می‌باشد.

۱- تجزیه به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد. ۲- دو جمله عبارت باید مربع کامل باشد. ۳- دو برابر جذر جملات اول و دوم موجود باشد.

؟ ۲۱- اگر $x - y = 7$ باشد، حاصل عبارت $5xy - 4x^2 - xy + 3y^2 + 7x^2$ چقدر است؟ (تیزهوشان)

- (۱) ۱۴۷ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱ (۴) -۱۲۰

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\underline{7x^2} + 3y^2 - \underline{xy} - \underline{4x^2} \quad \underline{5xy} = 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 3 \times 7^2 = 147$$

۲- تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد. ۲- هر دو جمله، مربع کامل باشند. (توان آن‌ها مضربی از ۲ باشد).

۳- عملیات بین دو جمله (-) باشد.

؟ ۲۲- در تجزیه عبارت $x^{16} - y^8$ کدام عامل وجود ندارد؟ (کنکور آزمایشی انسانی)

- (۱) $x^2 + y$ (۲) $x^4 + y$ (۳) $x^4 + y^4$ (۴) $x^2 - y$

پاسخ: گزینه «۲» x^4 و x^{16} هر دو مربع کامل هستند، بنابراین با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\underline{x^{16} - y^8} = (x^4)^2 - (y^2)^2 = \underline{(x^4 - y^2)}(x^4 + y^2) = \underline{(x^4 - y^2)}(x^2 + y^2)(x^2 + y^4) \\ = (x^2 - y)(x^2 + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

۳- تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن

۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد. ۲- یک جمله آن مربع کامل باشد. ۳- دو عدد بتوان یافت که حاصل جمع آن‌ها برابر ضریب

متغیر (x) بوده و حاصل ضرب آن‌ها برابر (عدد ثابت) باشد.

توجه: برای تعیین دو عدد در هنگام تجزیه با توجه به علامت عدد ثابت، یعنی (ab) و علامت ضریب جمله مشترک x یعنی (a+b) دو عدد a و b مناسب را انتخاب می‌کنیم.

(کنکور خارج از کشور انسانی)

۲۳- عبارت $6x^2 - 6x - 36$ بر کدام عبارت زیر بخش‌پذیر است؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $x - 6$ (۳) $x - 3$ (۴) $x - 4$

پاسخ: گزینه «۳» برای آن که بتوان گفت عبارت جبری بر کدام عبارت بخش‌پذیر است باید آن را تجزیه کرد:

$$6x^2 - 6x - 36 = \frac{\text{فاکتور از 6}}{6} (x^2 - x - 6) = \frac{\text{اتحاد یک جمله مشترک}}{6(x+2)(x-3)}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، برای تجزیه از اتحاد جمله مشترک استفاده کردیم. x^2 مربع کامل است، پس x جمله مشترک می‌باشد. دو پرانتز باز کردیم و جمله مشترک x را در هر دو قرار دادیم. با توجه به عدد ثابت (-6) و ضریب جمله مشترک (-1) و آنچه در «توجه» گفته شد، جملات غیرمشترک اعداد (-3) و (+2) هستند.

تذکر: در صورتی که ضریب جمله x^2 مجذور کامل نباشد؛ سه‌جمله‌ای را در ضریب x^2 ضرب و تقسیم می‌کنیم، تا ضریب آن مجذور کامل شود، سپس از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم.

(کنکور آزمایشی انسانی)

۲۴- در تجزیه عبارت $8x^2 + 10x - 3$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $4x + 3$ (۲) $2x - 1$ (۳) $8x - 1$ (۴) $2x + 3$

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، ضریب x^2 در عبارت مربع کامل نیست. بنابراین با توجه به تذکر گفته شده داریم:

$$8x^2 + 10x - 3 = \frac{1}{8} ((8x)^2 + 10(8x) - 24)$$

پس جمله مشترک $8x$ می‌باشد. بنابراین دو عدد لازم داریم که مجموع آن‌ها (+10) و حاصل‌ضرب آن‌ها (-24) باشد که عبارت‌اند از (+12) و (-2):

$$\Rightarrow \frac{1}{8} (8 + 12)(8x - 2) = \frac{\text{فاکتور از عدد 2 و 4}}{\text{در دو پرانتز}} \frac{1}{8} \times \cancel{4} (2x + 3) \times \cancel{4} (4x - 1) = (2x + 3)(4x - 1)$$

می‌توان روش بالا را به این صورت نیز نوشت:

$$A = 8x^2 + 10x - 3$$

(۱) عبارت را برابر A قرار می‌دهیم.

$$8A = (8x)^2 + 10(8x) - 24$$

(۲) طرفین را در ضریب x^2 یعنی عدد 8 ضرب می‌کنیم.

$$8A = (8x + 12)(8x - 2)$$

(۳) اکنون از اتحاد یک جمله مشترک کمک می‌گیریم.

$$8A = 4(2x + 3)2(4x - 1)$$

(۴) در پرانتزها از 2 و 4 فاکتور می‌گیریم تا عدد 8 حاصل شود.

$$\frac{8A}{8} = \frac{\cancel{4}(2x + 3)\cancel{2}(4x - 1)}{\cancel{8}} \Rightarrow A = (2x + 3)(4x - 1)$$

(۵) طرفین را بر ضریب x^2 (عدد 8) تقسیم می‌کنیم:

۴- تجزیه به کمک اتحاد چاق و لاغر

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد. ۲- هر دو جمله مکعب کامل باشند. (توان آن‌ها مضربی از ۳ باشد).

توجه: اگر بین دو جمله مکعب کامل علامت جمع بود، از اتحاد مجموع مکعب دو جمله و اگر منها بود، از اتحاد تفاضل مکعب دو جمله

استفاده می‌کنیم. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(آزاد انسانی)

؟ ۲۵- اگر $a + b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، $a^3 + b^3$ کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \Rightarrow 5 = 1^2 - 2ab \Rightarrow 4 = -2ab \Rightarrow ab = -2$$

هم‌چنین با تجزیه عبارت $a^3 + b^3$ توسط اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 1(5 - (-2)) = 1 \times 7 = 7$$

پ- تجزیه با دسته‌بندی

در بعضی از عبارت‌های جبری برای تجزیه کردن لازم است ابتدا با کمی دقت جملات آن را به صورت چندین دسته مناسب در نظر گرفت، سپس با استفاده از فاکتورگیری و یا اتحادهای جبری هر دسته، در نهایت کل عبارت را تجزیه کرد.

توجه: بسیاری از چهارجمله‌ای‌ها را می‌توان با این روش تجزیه کرد.

(کنکور سراسری انسانی و تجربی)

؟ ۲۶- اگر $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$x^2 + y^2 = 1$ (۱) $x^2 + y^2 = x + y$ (۲) $x^2 + y^2 = 0$ (۳) $x^2 + y^2 = 2x - 2y + 2$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا جمله‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} = (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

هر گاه حاصل جمع عبارت با توان زوج صفر شود، تک‌تک آن‌ها برابر صفر هستند.

$$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, (y-1) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y$$

ت- تجزیه با افزودن و کاستن

در تجزیه بعضی عبارت‌ها برای آن که بتوان عبارت را با استفاده از دسته‌بندی تجزیه کنیم، باید جمله‌ای را اضافه و کم کنیم و یا عددی را ضرب و پس از تجزیه بر همان عدد تقسیم کنیم.

؟ ۲۷- تجزیه شده عبارت $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$ شامل کدام عبارت است؟

$a - b - c$ (۱) $-a - b$ (۲) $2a - b - c$ (۳) $-a - b - c$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت $2b^2c^2$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2b^2c^2 - 2b^2c^2 &= \underbrace{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2}_{\text{اتحاد مربع سه جمله}} - 4b^2c^2 \\ &= \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} - 4b^2c^2 = \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)}_{\text{فاکتور از (-)}} \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)}_{\text{فاکتور از (-)}} = \underbrace{[a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc)]}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} \underbrace{[a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)]}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} \\ &= [a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2] = (a - b - c)(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

نابری‌ها و نامعادلات

برای مقایسه کردن هر دو عدد حقیقی a و b با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان گفت:

(۱) اگر a و b مساوی باشند، $a = b$.

(۲) اگر a کوچک‌تر از b باشد، با نماد $a < b$ نشان می‌دهیم.

(۳) اگر a بزرگ‌تر از b باشد، با نماد $a > b$ نشان می‌دهیم.

توجه: نماد $a \geq b$ را بخوانید، « a بزرگ‌تر یا مساوی b » و این بدان معناست که $a > b$ یا $a = b$. هم‌چنین نماد $a \leq b$ یعنی $a < b$ یا $a = b$ است.

خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

(۱) می‌توان به دو طرف یک نامساوی، عددی حقیقی را اضافه یا از دو طرف کم کرد، بدون آن‌که جهت آن تغییر کند.

$$\text{اگر } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ و } a < b \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$$

(۲) اگر طرفین یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب یا تقسیم کنیم، جهت آن نامساوی **تغییر نمی‌کند**.

$$a < b \text{ و } c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

(۳) اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت آن نامساوی **عوض می‌شود**.

$$a < b \text{ و } c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

(۴) برای هر سه عدد حقیقی a و b و c همواره روابط زیر را داریم:

$$1) a < b \text{ و } b < c \Rightarrow a < c \quad 2) a < b \text{ و } c < d \Rightarrow a + c < b + d \quad 3) a < b \text{ و } 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$$

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d \quad \text{(۵) جمع طرفین دو نامساوی:}$$

توجه: در جمع نامساوی‌ها، اگر دو نامساوی هم‌جهت نبودند، طرفین یکی از آن‌ها را در منفی ضرب می‌کنیم تا پس از هم‌جهت شدن با هم جمع کنیم.

توجه: تفاضل و ضرب و تقسیم طرفین دو نامساوی همواره نمی‌تواند برقرار باشد.

(۶) معکوس کردن طرفین نامساوی‌ها:

$$a < b \text{ و } ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \text{(الف) اگر طرفین نامساوی هم‌علامت باشند، جهت نامساوی عوض می‌شود.}$$

$$a < b \text{ و } ab < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{(ب) اگر طرفین نامساوی هم‌علامت نباشند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.}$$

(۷) به توان رساندن نامساوی‌ها:

$$a < b \text{ و } n \text{ فرد} \Rightarrow a^n < b^n \quad \text{(الف) اگر طرفین به توان عددی فرد برسند، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.}$$

$$\text{(ب) اگر طرفین به توان عددی زوج برسند، سه حالت وجود دارد:}$$

$$1) a > b > 0 \Rightarrow a^n < b^n \Rightarrow \text{جهت عوض نمی‌شود} \quad 2) a < b < 0 \Rightarrow a^n > b^n \Rightarrow \text{جهت عوض می‌شود}$$

$$3) a < 0 < b \Rightarrow \begin{cases} |a| \geq |b| \Rightarrow a^n \geq b^n \\ |a| < |b| \Rightarrow a^n < b^n \end{cases}$$

(کنکور سراسری فنی و حرفه‌ای)

۲۸- اگر $a > b > 0$ آن‌گاه کدام نامساوی برقرار است؟

$$1) \frac{-1}{a} > \frac{-1}{b} \quad 2) -a > -b \quad 3) b - a > 0 \quad 4) \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این سؤال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{درست} \Rightarrow \frac{-1}{a} > \frac{-1}{b} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -1} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{استفاده از خاصیت ۶- الف}} a > b \text{ و } ab > 0 \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$\text{نادرست} \Rightarrow -a < -b \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -1} a > b \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\text{نادرست} \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow b < a \quad \text{از طرفین } a \text{ را کم می‌کنیم} \Rightarrow a > b \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$\text{نادرست} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{استفاده از خاصیت ۶- الف}} a > b \text{ و } ab > 0 \quad \text{گزینه (۴)}$$

نامعادله

هر نامساوی که در آن متغیر به کار رفته باشد، نامعادله نام دارد.

* مجموعه مقادیری که به جای متغیرها در یک نامعادله قرار می‌گیرند و آن را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند مجموعه جواب نامعادله نام دارند.

* در مسیر رسیدن به جواب نامعادله می‌توان از خاصیت‌هایی که برای نامساوی‌ها گفته شد استفاده کرد.

* نامعادله‌ای که بعد از عملیات‌های جبری لازم، به یکی از شکل‌های $ax + b > 0$ ، $ax + b \geq 0$ ، $ax + b < 0$ و یا $ax + b \leq 0$ درآید یک نامعادله یک‌مجهولی درجه اول است.

توجه: برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله درجه اول کافی است عدد b را به طرف دیگر نامساوی منتقل کنیم و دو طرف را بر ضریب x یعنی a تقسیم نماییم. در تقسیم طرفین بر a باید دقت کرد که اگر $a > 0$ باشد جهت تغییر نخواهد کرد ولی اگر $a < 0$ باشد باید جهت نامساوی را تغییر داد.

؟ ۲۹- جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟ (سراسری انسانی)

$x < \frac{2}{3}$ (۱) $x > \frac{7}{6}$ (۳) $x > \frac{3}{4}$ (۲) $x < \frac{5}{4}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3} \Rightarrow 12\left(\frac{2x+3}{2}\right) - 12\left(\frac{3}{4}\right) > 12\left(\frac{4x+1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 12x + 18 - 9 > 16x + 4 \Rightarrow 12x - 16x > 4 + 9 - 18 \Rightarrow -4x > -5 \xrightarrow[-4 < 0]{+(-4)} x < \frac{5}{4}$$

دستگاه نامعادلات (نامعادلات توأم)

بعضی مواقع با نامعادله‌هایی مواجه می‌شویم که متغیر آن‌ها باید هم‌زمان در بیش از یک شرط صدق کند. یافتن جواب برای این نامعادلات منجر به حل یک دستگاه نامعادله می‌شود. برای حل دستگاه نامعادلات ابتدا هر یک از نامعادلات را به صورت تنهایی در نظر گرفته و حل می‌کنیم و مجموعه جواب آن را می‌یابیم. سپس برای به دست آوردن مجموعه جواب نهایی، اشتراک مجموعه‌های جواب را به دست می‌آوریم.

؟ ۳۰- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات زیر کدام است؟ (تجزیه)

$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x-1}{6} \\ \frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{3} \end{cases}$

$-\frac{3}{2} < x < 1$ (۲) $-\frac{3}{2} < x < -1$ (۱) $1 < x < \frac{3}{2}$ (۴) $-1 < x < \frac{3}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه «۲» برای حل دستگاه می‌توان طرفین هر کدام از نامعادلات را در عدد ۶ ضرب کرد.

$6\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) > 6\left(\frac{x-1}{6}\right) \Rightarrow 3(x) + 2(1) > x-1 \Rightarrow 3x + 2 > x-1 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$ (۱)

$6\left(\frac{x+1}{2}\right) < 6\left(\frac{x+2}{3}\right) \Rightarrow 3(x+1) < 2(x+2) \Rightarrow 3x+3 < 2x+4 \Rightarrow x < 1$ (۲)

اکنون از عبارت‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم.

$(1) \cap (2) \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$

بسته تمرین ۱

۱- اگر تساوی $(2x-k)(x+k) = 2x^2 + 3x - k^2$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، k کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(تیزهوشان)

۲- اگر $x + \frac{1}{x} = -2a$ باشد، مقدار عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(مسابقات جوانی)

۳- اگر $x + y + z = 1$ و $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ باشد، آن گاه $x^2 + y^2 + z^2$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(کنکور آزاد انسانی)

۴- حاصل عبارت $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

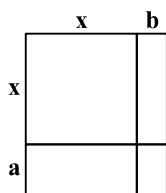
(کنکور)

۵- حاصل عبارت $(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^{10} (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^{10}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(آزمون ورودی)

۶- شکل زیر نشان دهنده کدام یک از عبارات زیر است؟



۱ $(x+a)(x+b) = x^2 + axb$

۲ $(x+a)(x+b) = a^2 + x^2 + b^2$

۳ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۴ $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

۷- اگر عبارت $(x-4)(x^2 + Ax + 16)$ را بتوان به صورت $x^3 + B^3$ نوشت، مقدار $\frac{1}{A} - B$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸- اگر $x^2 + y^2 = 10$ و $x^2y^2 = 16$ باشد، مقدار $x^4y + y^4x$ کدام است؟ ($xy > 0$)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(تیزهوشان)

۹- عبارت جبری $(x^3 + bx^2) + (4xy + 4by)$ به صورت ضرب دو عبارت جبری کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(انرژی اتمی)

۱۰- هرگاه a و b دو عدد زوج متوالی و $c = 3a^2 + b^2 - 3$ باشد، آن گاه \sqrt{c} :

- ۱ (۱) یک عدد گنگ است. ۲ (۲) یک عدد صحیح زوج است.

- ۳ (۳) یک عدد صحیح فرد است. ۴ (۴) یک عدد صحیح است که فرد یا زوج است.

(انرژی اتمی)

۱۱- اگر $x^2 + y = 7$ و $x^2 + y^2 = 11$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(کنکور آزاد انسانی)

۱۲- یکی از عامل‌های $2x^3 + 5x^2 + 2x$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(المپیاد ریاضی)

۱۳- مقدار عبارت $\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴- تجزیه عبارت $x^3 - 3x + 6x^2 - 18$ شامل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) x^2 (۲) $x - 3$ (۳) $x + 6$ (۴) $x^2 + 6$

۱۵- اگر عبارت $x^2 + 4$ را تجزیه کنیم، کدام عبارت زیر حاصل می‌شود؟

- (۱) $x^2 + 2$ (۲) $x^2 - 2x$ (۳) $x^2 - 2 + 2x$ (۴) $x^2 + 2 - 2x$

(تیزهوشان)

۱۶- اگر $(a-b)^2 = 12$ و $ab = -2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$ برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۹ (۴) ۳

۱۷- اگر $-1 < a < 0$ و $1 < b < 2$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) $a^y < \sqrt[3]{a}$ (۲) $a^4 < b^3$ (۳) $a^z < a$ (۴) $\sqrt{b} < b$

۱۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-3x}{5} + (x-1)^2 > \frac{x}{4} + (x+1)^2$ کدام است؟

- (۱) $x < \frac{2}{51}$ (۲) $\frac{2}{51} < x$ (۳) $x < \frac{51}{2}$ (۴) $\frac{51}{2} < x$

۱۹- نرخ جدید کالایی عدد طبیعی P و روابط دو بار خرید از آن به صورت‌های $2P + 1 > 55$ و $3P - 2 < 85$ می‌باشد، P کدام است؟

(کنکور آژار)

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴) ۲۷

(کنکور سراسری)

۲۰- جواب نامعادله $3x - 3 < 2x - 2 \leq x - 1$ کدام است؟

- (۱) $x > 1$ (۲) $x \leq 1$ (۳) $x < 1$ (۴) $x \geq 1$

- | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|-----|---|----|
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۶ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۱ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۶ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۷ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۲ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۷ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۲ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۸ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۳ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۸ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۳ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۹ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۴ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۹ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۴ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۲۰ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۵ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۰ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۵ |

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول  می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times 100$$

شناسنامه سوالات بسته تمرین ۱

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۱	سؤال متناظر در بسته تمرین ۱۳
۱	شناخت اتحادها	۳	۳	۱	۱	۱
۲	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۴	۴	۵	۲	۳
۳	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۲	۲	۸	۴	۴
۴	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۱	۱	۸	۴	۴
۵	اتحاد مزدوج	۳	۳	۹	۵	۶
۶	اتحاد یک جمله مشترک	۳	۳	۱۰	۷	۷
۷	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۲	۲	۱۳	۸	۹
۸	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۳	۳	۱۶	۸	۱۰
۹	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۴	۴	۲۰	۹	۱۱
۱۰	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	۳	۲۱	۱۰	۱۲
۱۱	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۱	۱	۲۲	۱۱	۱۳
۱۲	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲	۲۴	۹	۱۱
۱۳	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲	۲۵	۱۰	۸
۱۴	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با دسته‌بندی	۳	۳	۲۶	۱۱	۱۰
۱۵	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۴	۴	۲۷	۱۲	۱۰
۱۶	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۴	۴	۲۷	۱۲	۱۰
۱۷	خواص نابرابری‌ها	۲	۲	۲۸	۱۳	۱۴
۱۸	حل نامعادلات	۱	۱	۲۹	۱۴	۱۴
۱۹	حل دستگاه‌های نامعادلات	۳	۳	۳۰	۱۵	۱۵
۲۰	حل دستگاه‌های نامعادلات	۳	۳	۳۰	۱۵	۱۵

پاسخنامه

۱- گزینه «۳» تساوی جبری در صورتی اتحاد است که ضرایب جملات هم‌درجه در طرفین آن با هم برابر باشند. داریم:

$$(2x - k)(x + k) = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow 2x^2 + 2kx - kx - k^2 = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow 2x^2 + kx - k^2 = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow k = 3$$

۲- گزینه «۴» $x + \frac{1}{x} = -2a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x + \frac{1}{x})^2 = (-2a)^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4a^2 - 2$

$\xrightarrow{\text{هر دو طرف را منهای } 2a^2 \text{ می‌کنیم}} x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2 = 4a^2 - 2 - 2a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2 = 2a^2 - 2$

۳- گزینه «۲» ابتدا از سه کسر مخرج مشترک می‌گیریم: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0 \Rightarrow yz + xz + xy = 0$

$x + y + z = 1 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

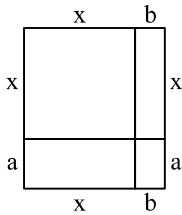
۴- گزینه «۱» با استفاده از اتحادهای مربع دو جمله‌ای و سه جمله‌ای داریم:

$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$
 $= (a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc + c^2) + (a^2 + 2ac + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2$

۵- گزینه «۳» با تجزیه کردن توان بزرگ‌تر داریم:

$(\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^2 \times (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^{10} \times (\sqrt{y} + 2\sqrt{z})^{10} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^2 \times ((\sqrt{y})^2 - (2\sqrt{z})^2)^{10}$

$= (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^2 \times (y - 4z)^{10} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^2 \times (-1)^{10} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^2 \times (-1) = 2\sqrt{z} - \sqrt{y}$



۶- گزینه «۳» با توجه به شکل، مساحت اصلی (مستطیل بزرگ) برابر است با حاصل جمع مساحت

یک مربع به ضلع x با سه مستطیل به اضلاع x, b, a داریم:

$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab \xrightarrow{\text{فاکتور از x}} (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۷- گزینه «۲» با توجه به اتحاد جاق و لاغر خواهیم داشت:

$(x+B)(x^2 - Bx + B^2) = (x-4)(x^2 + Ax + 16) \Rightarrow \begin{cases} B = -4 \\ A = -B = 4 \end{cases}$

با توجه به صورت مسئله داریم:

$\frac{1}{4}A - B = \frac{1}{4}(4) - (-4) = 2 + 4 = 6$

در نتیجه:

$x^2 y^2 = 16 \xrightarrow{xy > 0} xy = \sqrt{16} = 4 \quad (1)$

۸- گزینه «۳» با توجه به صورت مسئله داریم:

$x^6 y + y^6 x = xy(x^5 + y^5)$

همچنین با فاکتور از xy داریم:

اکنون فقط لازم است تا مقدار $x^5 + y^5$ را بیابیم، که برای این کار طرفین تساوی $x^2 + y^2 = 10$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow (x^2 + y^2)^3 = 10^3$

$\xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}} (x^2)^3 + (y^2)^3 + 3(x^2)^2 y^2 + 3x^2 (y^2)^2 = 1000 \Rightarrow x^6 + y^6 + 3x^4 y^2 + 3x^2 y^4 = 1000$

$\Rightarrow x^6 + y^6 + 3x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 1000 \xrightarrow{\substack{x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y^2 = 16}} x^6 + y^6 + 3 \times 16 \times 10 = 1000$

$\Rightarrow x^6 + y^6 = 1000 - 480 = 520 \quad (2) \Rightarrow x^6 y + y^6 x = xy(x^5 + y^5) \xrightarrow{(1), (2)} 4 \times 520 = 2080$

۹- گزینه «۴» $(x^3 + bx^2) + (4xy + 4by) = x^2(x+b) + 4y(x+b) = (x+b)(x^2 + 4y)$

۱۰- گزینه «۳» چون a و b دو عدد زوج متوالی هستند می‌توان فرض کرد $a = b+2$ پس:

$\begin{cases} c = 3a^2 + b^2 - 3 \\ a = b+2 \end{cases} \Rightarrow c = 3(b+2)^2 + b^2 - 3 = 3b^2 + 12b + 12 + b^2 - 3$

$= 4b^2 + 12b + 9 = (2b)^2 + 2 \times 3 \times 2b + 3^2 = (2b+3)^2 \Rightarrow \sqrt{c} = 2b+3$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

طبق صورت مسئله چون b عدد زوج است، پس 2b هم زوج است، اکنون جمع 2b (زوج) با 3 که عددی فرد است برابر عددی

فرد می‌شود، چون عدد b صحیح است، حتماً 2b+3 هم صحیح می‌باشد.

۱۱- گزینه «۱» $y^2 + x = 11$ و $x^2 + y = 7 \xrightarrow{\text{تفریق}} y^2 - x^2 + x - y = 4$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow (y-x)(y+x) + x - y = 4 \Rightarrow (y-x)(y+x) - (y-x) = 4 \Rightarrow (y-x)[(y+x) - 1] = 4$
 $\Rightarrow \underbrace{(y-x)}_1 \underbrace{(y+x-1)}_4 = 1 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} y-x=1 \\ y+x-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-1=5 \Rightarrow y=3 \\ y-x=1 \Rightarrow 3-x=1 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

۱۲- گزینه «۲» ابتدا از x فاکتور می‌گیریم: $2x^3 + 5x^2 + 2x \Rightarrow x(2x^2 + 5x + 2)$

اکنون با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم اما چون ضریب x^2 مجذور کامل نیست ابتدا کل عبارت را در ضریب x^2 ضرب و تقسیم می‌نمائیم و سپس اقدام به تجزیه می‌کنیم:

$2x^2 + 5x + 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} [(2x)^2 + 5(2x) + 4] \Rightarrow \frac{1}{x^2} [(2x+4)(2x+1)] \Rightarrow \frac{1}{x^2} [2(x+2)(2x+1)] = (x+2)(2x+1)$

۱۳- گزینه «۲» با تجزیه از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(10^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(10^3+1)} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1) \times \dots \times (10-1)(10^2+10+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1) \times \dots \times (10+1)(10^2-10+1)}$
 $= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 99}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100 \times 101} \times \frac{101 \times 101}{3 \times 1 \times 3 \times \dots \times (10^2-10+1)} = \frac{2}{100 \times 101} \times \frac{101 \times 101}{3} = \frac{3367}{5050}$

۱۴- گزینه «۳» ابتدا عبارت جبری را دسته‌بندی می‌کنیم:

$x^3 - 3x + 6x^2 - 18 = (x^3 - 3x) + (6x^2 - 18) = x(x^2 - 3) + 6(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x + 6)$

۱۵- گزینه «۴» برای تجزیه کافی است جمله $4x^2$ را اضافه و کم کنیم:

$x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 \Rightarrow (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

۱۶- گزینه «۴» در عبارت زیر رادیکال $2ab$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$\sqrt{a^2 + b^2 + 1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 2ab + 1} = \sqrt{(a-b)^2 + 2ab + 1} \Rightarrow \sqrt{12 + 2 \times (-2) + 1} = \sqrt{12 - 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

۱۷- گزینه «۲»

$-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^f < 1$
 $b > 1 \Rightarrow b^f > 1^f$
 $\Rightarrow a^f < 1, 1 < b^f \Rightarrow a^f < b^f$

۱۸- گزینه «۱» $\frac{1-3x}{5} + \frac{(x-1)^2}{2} > \frac{x}{2} + (\frac{x+1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1-3x}{5} + x^2 - 2x + 1 > \frac{x}{2} + x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow \frac{1-3x}{5} - 2x > \frac{x}{2} + 2x \Rightarrow 10 \cdot (\frac{1-3x}{5} - 2x) > 5x + 20x \Rightarrow 2 - 6x - 20x > 25x + 20x \Rightarrow 2 - 26x > 45x$
 $\Rightarrow -51x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{51}$

۱۹- گزینه «۳» برای حل سؤال یک دستگاه نامعادلات تشکیل می‌دهیم:

$\begin{cases} 2P + 1 > 55 \Rightarrow 2P > 54 \Rightarrow P > \frac{54}{2} \Rightarrow P > 27 \quad (1) \\ 3P - 2 < 85 \Rightarrow 3P < 87 \Rightarrow P < \frac{87}{3} \Rightarrow P < 29 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow 27 < P < 29$

توجه داشته باشید که تنها عدد طبیعی بین ۲۷ و ۲۹ عدد ۲۸ است.

۲۰- گزینه «۳» برای پاسخ به سؤال ابتدا دستگاه نامعادله را به دو نامعادله جدا تقسیم می‌کنیم:

$\begin{cases} 2x - 2 \leq x - 1 \Rightarrow 2x - x \leq -1 + 2 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1) \\ 3x - 3 < 2x - 2 \Rightarrow 3x - 2x < -2 + 3 \Rightarrow x < 1 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow x < 1$

توجه: حالا با توجه به درصد پاسخگویی خود در بسته تمرین ۱، از روی یکی از نردبان‌های «نقشه راه دانش‌آموز» انتهای کتاب حرکت کرده تا خود را به خانه جدید برسانید و بعد از آن مطابق دستورالعمل آورده شده در آن خانه عمل کنید. توجه کنید که در صورت ورود به بسته تمرین ۲ باز هم باید مطابق دستورالعمل‌های این نقشه عمل کنید. توجه شود که سؤالات متناظر با هر سؤال در هر بسته تمرین در جدولی که در ابتدای پاسخنامه هر بسته تمرین آمده است، مشخص شده است.

بسته تمرین ۲



۱- مقدار a و b و c به ترتیب چقدر باشد تا تساوی $(x-1)(x+1)(x^2 + x^2 + a) = bx^6 + c$ یک اتحاد باشد؟

(۲) $c = 1, b = -1, a = 1$

(۱) $c = -1, b = 1, a = 1$

(۴) $c = 2, b = -2, a = 2$

(۳) $c = -2, b = 2, a = 2$

(تیزهوشان)

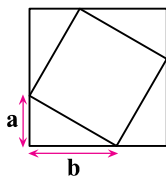
۲- اگر $3a = x + \frac{1}{x}$ باشد، مقدار عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ چقدر می‌شود؟

(۴) $9a^2 + 2$

(۳) $9a^2 + 3$

(۲) $9a^2 - 2$

(۱) $9a^2 - 3$



۳- در شکل مقابل، مساحت مربع کوچک، نصف مساحت مربع بزرگ است. نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

۴- ضریب x^3y در حاصل عبارت $(x-3x^2+2xy)^2$ کدام است؟

(۴) -12

(۳) 12

(۲) -6

(۱) 6

(تیزهوشان)

۵- حاصل عبارت $(x^{\frac{m}{2}} - y^{\frac{m+1}{2}})(x^{\frac{m}{2}} + y^{\frac{m+1}{2}})$ کدام است؟

(۲) $x^m - y^{m+1}$

(۱) $x^m - y^m$

(۴) $x^m + y^{m+1}$

(۳) $x^{m-1} \times y^{m-1}$

۶- اگر $x = 41$ و $y = 40$ باشد، مقدار عددی $(x^A + y^A)(x^B + y^B)(x^C + y^C) - (x+y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$ برابر است با:

(۴) 41^{16}

(۳) 40^{16}

(۲) 41^8

(۱) 40^8

(آزمون ورودی)

(آزمون ورودی)

۷- حاصل $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}) + (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})$ کدام است؟

(۴) $2 - 2n$

(۳) $2\sqrt{n(n+1)}$

(۲) $2n$

(۱) 2

(کنکور سراسری)

۸- حاصل عبارت $(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$ کدام است؟

(۴) $2x^3$

(۳) -2

(۲) 2

(۱) صفر

۹- در تجزیه عبارت $(x+A-3)(x+B+1) = x^2 + 3x^2 + 3xy + 9xy - 3x^2 - 9xy$ حاصل $A+B$ کدام است؟

(۴) $2y + 3$

(۳) $3y - 2$

(۲) $3y + 2$

(۱) $3y$

۱۰- در محاسبه حاصل عبارت $10^3 - 98^3$ کدام یک از اتحادها کاربرد ندارد؟

(۴) $a^2 - b^2$

(۳) $(a+b)(a+c)$

(۲) $(a-b)^2$

(۱) $(a+b)^2$

۱۱- تجزیه عبارت $x^2 - z^2 + 9 - 6x$ شامل کدام گزینه زیر است؟

(۴) $x + 3 + z$

(۳) $x - 3 - z$

(۲) $x - z$

(۱) $x - 3$

۱۲- تجزیه شده عبارت $2x^2 + 3xy - 2y^2$ با کدام گزینه برابر است؟

(۲) $(x+2y)$

(۱) $(2x-y)$

(۴) $(x-2y)(2x+y)$

(۳) $(x+2y)(2x-y)$

(کنکور سراسری فنی و حرفه‌ای)

۱۳- اگر $a < b$ و $c < 0$ آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $ac > bc$ (۲) $ac^2 > bc^2$ (۳) $a^2c > b^2c$ (۴) $a + c > b + c$

(کنکور آزاد)

۱۴- حداکثر چند عدد اول در مجموعه جواب نامعادله $3 - \frac{x}{4} \geq 1$ قرار دارند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار

(کنکور سراسری)

۱۵- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq x-1 \\ x(x-4) \leq x^2-16 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{4\}$ (۲) \emptyset (۳) $\{x | x > 3\}$ (۴) $\{x | x \leq 4\}$

۱-۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۹ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۵ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۶ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۲ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۷ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۳ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۸ ۱ ۲ ۳ ۴

۱-۴ ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول  می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص

نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times 100 =$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۲

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۳
۱	شناخت اتحاد	۱	۱	۱	۱
۲	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۲	۲	۴	۲
۳	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۲	۲	۲	۲
۴	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۴	۴	۸	۴
۵	اتحاد مزدوج	۲	۲	۹	۵
۶	اتحاد مزدوج	۳	۳	۹	۵
۷	اتحاد یک جمله مشترک	۴	۴	۱۰	۷
۸	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۲	۲	۱۲	۸
۹	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲	۲۰	۱۰
۱۰	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۴	۴	۲۵	۱۲
۱۱	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با دسته‌بندی	۳	۳	۲۶	۱۲
۱۲	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۳	۳	۲۷	۱۱
۱۳	خواص نابرابری‌ها	۱	۱	۲۸	۱۴
۱۴	حل نامعادلات	۱	۱	۲۹	۱۴
۱۵	حل دستگاه نامعادلات	۱	۱	۳۰	۱۵

پاسخ‌نامه

۱- گزینه «۱» با فرض این که x متغیر و a و b عدد هستند، حاصل عبارت سمت چپ را به دست می‌آوریم:

$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+a) = (x^2-1)(x^4+x^2+a) = x^6 + x^4 + ax^2 - x^4 - x^2 - a = x^6 + (a-1)x^2 - a$$

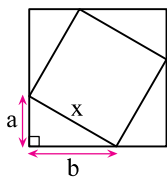
$$\Rightarrow x^6 + (a-1)x^2 - a = bx^6 + c$$

می‌دانیم که یک تساوی هنگامی اتحاد است که ضرایب عددی جملات مشابه در دو طرف تساوی با هم برابر باشند، داریم:

$$x^6 + (a-1)x^2 - a = bx^6 + c \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ c=-a \Rightarrow c=-1 \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = 3a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 9a^2 - 2$$

۲- گزینه «۲»



۳- گزینه «۲» با توجه به شکل می‌توان نوشت: $S = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (۱) مربع بزرگ

(۲) قضیه فیثاغورس $x^2 = a^2 + b^2$, مربع کوچک $S = x^2$

مربع بزرگ $S = 2 \times (\text{مربع کوچک } S) \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

۴- گزینه «۴» با استفاده از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای داریم:

$$(x - 3x^2 + 2xy)^2 = x^2 + (-3x^2)^2 + (2xy)^2 + 2(x)(-3x^2) + 2(x)(2xy) + 2(-3x^2)(2xy)$$

$$= x^2 + 9x^4 + 4x^2y^2 - 6x^3 + 4x^2y - 12x^3y$$

بنابراین ضریب x^3y برابر -12 است.

۵- گزینه «۲» با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(x^m - y^m)(x^m + y^m) = (x^m)^2 - (y^m)^2 = x^{2m} - y^{2m}$$

۶- گزینه «۳» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید عبارت مورد نظر را در $\frac{x-y}{x-y}$ ضرب می‌نماییم، داریم:

$$x^{16} - \frac{\overbrace{(x-y)(x+y)}^{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)}{(x-y)} = x^{16} - \frac{\overbrace{(x^2-y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{(x-y)}$$

$$\Rightarrow x^{16} - \frac{(x^2-y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)}{(x-y)} = x^{16} - \frac{(x^2-y^2)(x^4+y^4)}{x-y} = x^{16} - \frac{x^2-y^2}{x-y} = x^{16} - \frac{x^2-y^2}{x-y}$$

$$\Rightarrow x^{16} - (x^2 - y^2) = y^{16} = 4^{16}$$

۷- گزینه «۴» روش اول:

$$\frac{\overbrace{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n})}^{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}} + \overbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})}^{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}}}{}$$

$$= (\sqrt{n+1})^2 + \cancel{(\sqrt{n}\sqrt{n+1})} - 2n + (\sqrt{n+1})^2 - \cancel{(\sqrt{n}\sqrt{n+1})} - 2n = 2(n+1) - 4n = -2n + 2$$

روش دوم: می‌توان به جای n عدد 1 را قرار داد که حاصل کل عبارت برابر صفر می‌شود که فقط حاصل عبارت گزینه «۴» به ازای $n=1$ برابر صفر است.

۸- گزینه «۲» با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم: $(x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1) = x^3+1 - (x^3-1) = x^3+1 - x^3+1 = 2$

۹- گزینه «۲»

$$x^2 + 3x^2 + 3xy + 9xy - 3x^2 - 9xy = \frac{x^2 + 3(x+y)x + 9 + y - 3x(x+3y)}{(x+3x)(x+3y) - 3x(x+3y)} = (x+3x)(x+3y) - 3x(x+3y)$$

اتحاد جمله مشترک

$$= (x+3y)(x+3x-3x) = (x+3y)x = (x+A-3)(x+B+1) \Rightarrow \begin{cases} A-3=0 \Rightarrow A=3 \\ B+1=3y \Rightarrow B=3y-1 \end{cases} \Rightarrow A+B=3y+2$$

۱۰- گزینه «۴» $101^3 - 98^3 = \frac{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{\text{ولاغر}} \Rightarrow (101-98)(101^2+98^2+101 \times 98) = 3((100+1)^2 + \frac{(100-2)^2}{(a-b)^2} + \frac{(100+1)(100-2)}{(a+b)(a+c)})$

اتحاد $(a+b)^2$ اتحاد $(a-b)^2$ اتحاد $(a+b)(a+c)$

۱۱- گزینه «۳» $(x^2 - 6x + 9) - z^2 = \frac{(x-3)^2 - z^2}{\text{اتحاد مزدوج}} = (x-3-z)(x-3+z)$

اتحاد مربع دو جمله

اتحاد مزدوج

۱۲- گزینه «۳» عبارت xy را اضافه و کم می‌کنیم، داریم:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + \underbrace{xy - xy}_{\text{فاکتور از } (-1)} = \underbrace{(2x^2 + 4xy)}_{\text{فاکتور } 2x} - \underbrace{(2y^2 + xy)}_{\text{فاکتور از } y} = \underbrace{2x(x + 2y)}_{\text{فاکتور از } (x + 2y)} - y(2y + x) = (x + 2y)(2x - y)$$

۱۳- گزینه «۱» تمامی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

درست $a < b \Rightarrow c < 0 \Rightarrow ac > bc$:گزینه (۱)

نادرست $a < b \Rightarrow c^2 > 0 \Rightarrow ac^2 < bc^2$:گزینه (۲)

نادرست \Rightarrow چون نمی‌دانیم علامت a و b چیست بنابراین نمی‌توان رابطه بین a^2 و b^2 را پیدا کرد. :گزینه (۳)

نادرست $a < b \Rightarrow a + c < b + c$:گزینه (۴)

۱۴- گزینه «۱» ضرب طرفین در (-2) و $-2 < 0 \Rightarrow -2 \geq -2 \Rightarrow \frac{x}{-2} \geq 1 - 3 \Rightarrow -\frac{x}{2} \geq 1 - 3 \Rightarrow 3 - \frac{x}{2} \geq 1$

می‌دانیم که عددهای اول کم‌تر یا مساوی ۴، اعداد ۲ و ۳ هستند.

$$\Rightarrow -2\left(\frac{x}{-2}\right) \leq (-2) \times (-2) \Rightarrow x \leq 4$$

۱۵- گزینه «۱» برای پاسخ ابتدا طرفین نامساوی بالایی را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 3(x - 1) \Rightarrow 2x + 1 \geq 3x - 3 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4 & (1) \\ x(x - 4) \leq x^2 - 16 \Rightarrow x^2 - 4x \leq x^2 - 16 \Rightarrow -4x \leq -16 \Rightarrow x \geq 4 & (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow x = 4$$

بسته تمرین ۳

۱- در اتحاد $ax^2 + 2bx + 2 = ax(x^2 - x - 1) + bx + 2$ حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

(کنکور سراسری)

۲- اگر $(a-b)^2 = 625$ و $a^2 + b^2 = 857$ ، مقدار ab چقدر است؟

- ۷۴۱ (۱) ۴۴۱ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۱۲ (۴)

(آزمون علمی کاربردی)

۳- اگر $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ ، مقدار عددی $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴)

(کنکور آزاد)

۴- شرط برقراری رابطه $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2$ چیست؟

- $a^2 = 2bc$ (۱) $b^2 = 2ac$ (۲) $c^2 = 2ab$ (۳) $a+b+c = abc$ (۴)

(المپیاد ریاضی)

۵- حاصل عبارت $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^2+16)$ کدام است؟

- $x^8 + 256$ (۱) $x^8 - 32$ (۲) $x^2 - 24$ (۳) $x^8 - 256$ (۴)

(المپیاد ریاضی)

۶- حاصل عبارت $(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)(1+3^{16})(1+3^{32})(1+3^{64})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3^{64}-1}{2}$ (۲) $\frac{3^{63}-1}{2}$
(۳) $\frac{3^{62}+3^{32}-4}{2}$ (۴) $\frac{3^{62}+3^{32}+4}{2}$

۷- ساده شده عبارت $(2x^2 - 3x + 2)(2x^2 + x + 2)$ کدام است؟

- (۱) $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ (۲) $(2x^2 + 2)^2 + (-3x - x)$
(۳) $(2x^2 + 2)^2 + 3x$ (۴) $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x$

(کنکور سراسری فنی و حرفه‌ای)

۸- حاصل عبارت $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) - 8y^3$ به ازای $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $y = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۲/۶۲۵ (۱) ۲/۸۷۵ (۲) ۳/۱۲۵ (۳) ۳/۳۷۵ (۴)

(آزمون ورودی)

۹- حاصل عبارت $A = (1^2 + 1 \times 2 + 2^2) + (2^2 + 2 \times 3 + 3^2) + \dots + (9^2 + 9 \times 10 + 10^2)$ کدام است؟

- ۹۹۹ (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۹۹۹ (۳) ۲۰۰۰ (۴)

۱۰- اگر $x^3 - y^3 = 7$ و $x - y = 1$ ، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) -۲۵ (۴)

(کنکور سراسری)

۱۱- در تجزیه عبارت $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل وجود ندارد؟

- $a-6$ (۱) $a-3$ (۲) $a-2$ (۳) $a+2$ (۴)

۱۲- حاصل عبارت $(0.08424)^2 + (0.1576)^2 + 0.03152 \times 0.08424$ برابر است با:

- ۰/۰۰۱ (۱) ۰/۰۰۰۱ (۲) ۰/۰۱ (۳) ۰/۰۹۹۹ (۴)

(کنکور سراسری)

۱۳- اگر $4a^2 - b^2 = 91$ و $2a + b = 7$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۴- عددی از 10^0 کم شده، نصف عدد باقی‌مانده از ۳ بیش‌تر شده است. آن عدد مضرب ۳ هم می‌باشد، عدد مورد نظر کدام

(کنکور سراسری)

است؟

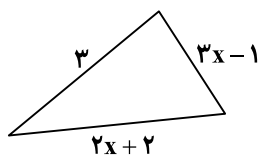
۹ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

۱۵- با توجه به این‌که در هر مثلث، همواره مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است، حدود x در مثلث زیر کدام است؟



(۲) $0 < x < \frac{2}{5}$

(۴) $x > 6$

(۱) $0 < x < 6$

(۳) $\frac{2}{5} < x < 6$

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۳

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۴

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۵

۴ ۳ ۲ ۱ -۹

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۰

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۱

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۲

۴ ۳ ۲ ۱ -۵

۴ ۳ ۲ ۱ -۶

۴ ۳ ۲ ۱ -۷

۴ ۳ ۲ ۱ -۸

۴ ۳ ۲ ۱ -۱

۴ ۳ ۲ ۱ -۲

۴ ۳ ۲ ۱ -۳

۴ ۳ ۲ ۱ -۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول  می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستور العمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times 100$$

شناسنامه سوالات بسته تمرین ۳

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش‌آزمون
۱	شناخت اتحاد	۴	۱	۱
۲	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۳	۲	۳
۳	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۴	۵	۶
۴	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۱	۸	۸
۵	اتحاد مزدوج	۴	۹	۹
۶	اتحاد مزدوج	۱	۹	۹
۷	اتحاد یک جمله مشترک	۱	۱۰	۱۰
۸	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۴	۱۲	۱۳
۹	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۱	۱۲	۱۳
۱۰	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۱	۱۴	۱۵
۱۱	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۳	۲۰	۲۳
۱۲	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	۲۱	۲۱
۱۳	تجزیه چندجمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۱	۲۲	۲۲
۱۴	حل نامعادلات	۲	۲۹	۲۹
۱۵	حل دستگاه‌های نامعادلات	۳	۳۰	۳۰

پاسخنامه

۱- گزینه «۴» می‌دانیم که یک تساوی هنگامی اتحاد است که ضرایب عددی جملات مشابه در دو طرف تساوی با هم برابر باشند؛

بنابراین ابتدا دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(x^2 - 2)(x - 1) = ax(x^2 - x - 1) + bx + 2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = ax^3 - ax^2 - \underbrace{ax + bx}_{\text{فاکتوراز } x} + 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{1x^3 - x^2 - 2x + 2}_{\text{فاکتوراز } x} = ax^3 - ax^2 + (-a+b)x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-a=-2 \end{cases} \Rightarrow b-1=-2 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a+b=0$$

۲- گزینه «۳» با توجه به اتحاد مربع دو جمله داریم:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow -2ab = 625 - 857 = -232 \Rightarrow ab = 116$$

۳- گزینه «۴»

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right) \right) = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 7$$

۴- گزینه «۱» ابتدا با کمک اتحادهای مربع دو جمله و سه جمله دو طرف را ساده می‌کنیم:

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + c^2 + 2ac \Rightarrow 2bc = a^2$$

۵- گزینه «۴»

$$\underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(x^2+4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^4+16) = \underbrace{(x^2-4)(x^2+4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^4+16) = (x^4-16)(x^4+16) = x^8 - 256$$

۶- گزینه «۱» می‌توان عبارت را در $(3-1)$ ضرب و تقسیم کرد تا اتحاد مزدوج تشکیل گردد. پس داریم:

$$\frac{\underbrace{(3-1)(3+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^2+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^4+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^8+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}{(3-1)} = \frac{\underbrace{(3^2-1)(3^2+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^4+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^8+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}{(3-1)} \\ = \frac{\underbrace{(3^4-1)(3^4+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(3^8+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}{(3-1)} \Rightarrow \text{با ادامه همین الگو} \Rightarrow \frac{3^{64}-1}{2}$$

۷- گزینه «۱» با جابه‌جایی مختصر جملات در پرانتزها می‌توان از اتحاد جمله مشترک کمک گرفت داریم.

$$\underbrace{(2x^2-3x+2)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} (2x^2+x+2) = \underbrace{(2x^2+2-3x)}_{\text{جمله‌ی مشترک}} \underbrace{(2x^2+2+x)}_{\text{جمله‌ی مشترک}} \\ = (2x^2+2)^2 + (-3x+x)(2x^2+2) + (-3x) \times x \\ = (2x^2)^2 + 2(2x^2) \times 2 + 4 + (-2x)(2x^2+2) - 3x^2 = 4x^4 + 8x^2 + 4 - 4x^3 - 4x - 3x^2 \\ = 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

۸- گزینه «۴» با استفاده از اتحاد چاق و لاغر ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)}_{\text{اتحاد چاق ولاغر}} - 8y^3 = (x^3 + (2y)^3) - 8y^3 = x^3 + 8y^3 - 8y^3 = x^3$$

$$\Rightarrow x = 1 \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1/5 \Rightarrow x^3 = (1/5)^3 = 3/375$$

۹- گزینه «۱» هر پرانتز را در عبارت تفاضل جملات آخر و اول همان پرانتز که حاصل یک دارد، ضرب می‌کنیم تا اتحاد چاق و لاغر

تشکیل گردد. بنابراین داریم:

$$A = \underbrace{(2-1)(1^2+1 \times 2+2^2)}_{\text{اتحاد چاق ولاغر}} + \underbrace{(3-2)(2^2+2 \times 3+3^2)}_{\text{اتحاد چاق ولاغر}} + \dots + \underbrace{(10-9)(9^2+9 \times 10+10^2)}_{\text{اتحاد چاق ولاغر}} \\ \Rightarrow A = 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + 10^3 - 9^3 = 10^3 - 1^3 = 1000 - 1 = 999$$

۱۰- گزینه «۱» $x-y=1 \Rightarrow$ طرفین به توان ۳ $\Rightarrow \underbrace{(x-y)^3}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله}} = 1^3$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1^3 \xrightarrow{x^3-y^3=1} \frac{-3x^2y+3xy^2+1}{-3xy} = 1$$

$$\Rightarrow -3xy(x-y) = -6 \Rightarrow -3xy = -6 \xrightarrow{+(-3)} xy = 2 \quad (1)$$

$$x-y=1 \Rightarrow \underbrace{(x-y)^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} = 1^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 2xy \xrightarrow{(1)} x^2 + y^2 = 1 + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

۱۱- گزینه «۳»

$$a(a-3)(a-4) - \underbrace{12a + 36}_{\text{فاکتور ازاب ۱۲}} = a(a-3)(a-4) - 12(a-3)$$

$$= (a-3)(a(a-4) - 12) = (a-3)(a^2 - 4a - 12) = (a-3)(a+2)(a-6)$$

۱۲- گزینه «۳» اگر $a = 0.824$ و $b = 0.1576$ باشد، داریم:

$$\frac{(0.824)^2}{a^2} + \frac{(0.1576)^2}{b^2} + \frac{0.3152}{2b} \times \frac{0.824}{a} = a^2 + b^2 + 2ab \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله}} (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 = (0.824 + 0.1576)^2 = 0.9816^2 = 0.9634$$

$$\underbrace{(2a)^2}_{4a^2} - b^2 = 91 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(2a+b)}_7 (2a-b) = 91 \Rightarrow 7(2a-b) = 91 \Rightarrow 2a-b = 13$$

۱۳- گزینه «۱»

اکنون با حل دستگاه معادلات زیر، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 2a - b = 13 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{در معادله اول جایگذاری در معادله اول} \Rightarrow 2(5) + b = 7 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a + b = 5 - 3 = 2$$

۱۴- گزینه «۲» اگر عدد مورد نظر را x بگیریم داریم: $\frac{10-x}{2} > 3 \xrightarrow{\times (+2)} 10-x > 6 \Rightarrow -x > -4 \xrightarrow{\times (-1)} x < 4$

پس عدد مورد نظر کوچک‌تر از ۴ می‌باشد و چون این عدد مضرب ۳ هم است، پس خود عدد ۳ می‌باشد.

۱۵- گزینه «۳» در هر مثلث همواره مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است، پس داریم:

$$\begin{cases} 3 + 2x + 2 > 3x - 1 \Rightarrow 2x - 3x > -1 - 5 \Rightarrow -x > -6 \Rightarrow x < 6 & (1) \\ 3 + 3x - 1 > 2x + 2 \Rightarrow 3x - 2x > 2 - 2 \Rightarrow x > 0 & (2) \\ 2x + 2 + 3x - 1 > 3 \Rightarrow 5x + 1 > 3 \Rightarrow 5x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{5} & (3) \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} < x < 6$$

با اشتراک‌گیری از (۱) و (۲) و (۳) داریم:

آزمون پایانی

۱- درجه‌ی عبارت جبری $(x^2 - 4x + 6)^y (x^4 + 2x^2 - 1)^z$ نسبت به متغیر x چند است؟

- ۱۵ (۱) ۱۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴)

(تیزهوشان)

۲- قطر مربعی $m + n$ است. مساحت آن برحسب m و n کدام است؟

- (۱) $m^2 + n^2 + mn$ (۲) $2m^2 + 2n^2 + mn$ (۳) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 + mn$ (۴) $\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2$

(مفید)

۳- اگر $A = 2a^2 + b$ ، $B = 3a - b^2$ و $C = a^2 + b^2$ باشد. حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$2A - 3B + B(-2C + A) + 2BC - AB = ?$

- (۱) $4a^2 + 3b^2 - 9a + 2b$ (۲) $2a^2 + 3b^2 + 2a - b$
(۳) $6a^2 + b^2 - 3a$ (۴) $a^2 - 4b^2 + 4b$

(انرژی اتمی)

۴- حاصل عبارت $(a^2x + 4y^2)^2 - (4y^2 - a^2x)^2$ کدام است؟

- (۱) $4a^2xy^2$ (۲) $-4a^2xy^2$ (۳) $16xy^2a^2$ (۴) $-16xy^2a^2$

۵- اگر x ، y و z عددهایی طبیعی و $y^2 = xz$ باشند، حاصل ضرب $(x - y + z)(x + y + z)$ همواره حاصل جمع چند مربع کامل است؟

(آزمون جامع تیزهوشان)

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

(انرژی اتمی)

۶- اگر $a = 3^6$ و $b = 6^3$ باشد، حاصل عبارت $\frac{(2a^2 - b)(2a^2 + b) - b^2}{-2a^6 + 2b^2 - 2a^6}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۳۶ (۳) ۶۳ (۴)

(آزمون ورودی)

۷- اگر $\frac{x}{y} = 3$ باشد، حاصل عبارت $\frac{4x}{y} - 5\frac{y}{x}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{31}{3}$ (۲) $\frac{31}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

(مسابقات ریاضی)

۸- اگر $1 + \frac{1}{x} = 2$ باشد، مقدار عددی عبارت $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴

(آزاد تهرانی)

۹- حاصل عبارت $12x^3 - 12x^5 + x^7$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $36\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) صفر

(تیزهوشان)

۱۰- جواب معادله $\left(\frac{2}{3}x - \frac{4x-1}{2}\right)^{-1} = \frac{-3x}{4x^2 - 8x + 4}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $+\frac{1}{13}$ (۲) $-\frac{1}{13}$ (۳) $-\frac{13}{8}$ (۴) $+\frac{13}{8}$

(تیزهوشان)

۱۱- در معادله $\frac{2(6x+7)}{9x+2} = \frac{35+4x}{2x+9}$ مقدار x برابر است با:

- (۱) -۱ (۲) 11^{-4} (۳) -4^{11} (۴) ۱

۱۲- اگر $(m+L)^2 + (m+n)^2 + (n+L)^2 = 0$ ، حاصل $\frac{2L-m}{n}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴)

۱۳- کاسبی اندازه $\frac{1}{3}$ سرمایه خود هر سال سود می‌کند. در ضمن سالی ۱۰ میلیون ریال برای خرج زندگی خود برداشت می‌کند.

(مدارس هداختگ)

اگر در پایان سال دوم، سرمایه او دو برابر شده باشد، سرمایه نخستین او چند ریال است؟

- ۱۰^۹ (۱) ۱۰^۸ (۲) ۱۰^۷ (۳) ۱۰^۶ (۴)

۱۴- شخصی در سال $13xy$ به دنیا آمده است و اکنون که سال ۱۳۸۲ است، $x+y$ سال سن دارد. حاصل $\sqrt{x^2+y^2}$ کدام

(انرژی اتمی)

است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱۵- مجموع ریشه‌های معادله‌های $a^2 = (2x+3a)^2$ کدام است؟

- ۴a (۱) $-\frac{8}{3}a$ (۲) $-\frac{2}{3}a$ (۳) -۳a (۴)

۱۶- به ازای چه مقادیری از a و b تساوی $3 + a(x-2) + b(x-2)^2 = 1 + x + 2x^2$ یک اتحاد است؟

- ۷ و ۱ (۱) ۲ و ۸ (۲) ۱۰ و ۳ (۳) ۴ هیچ مقدار a و b (۴)

(تیزهوشان)

۱۷- اگر $2a - 3b = 1$ باشد، حاصل $8a^2 - 24ab + 18b^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۱۸- اگر $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b+c)^2$ باشد، کدام رابطه صحیح است؟ ($a \neq b \neq c$)

- $a = \frac{bc}{b-c}$ (۱) $a = \frac{bc}{c-b}$ (۲) $a = \frac{ac}{c-a}$ (۳) $a = \frac{ac}{a-c}$ (۴)

(کنکور)

۱۹- مقدار عددی عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$ کدام است؟

- ۲^{۲۵۶} + ۱ (۱) ۲^{۱۲۸} + ۱ (۲) ۲^{۱۲۸} - ۱ (۳) ۲^{۲۵۶} - ۱ (۴)

۲۰- حاصل عبارت $(3\sqrt{12} + 2\sqrt{18})^{400} (5 - 2\sqrt{6})^{201}$ چقدر است؟

- $4^{600} (5 + 2\sqrt{6})$ (۱) $4^{600} (5 - 2\sqrt{6})$ (۲)

- $6^{400} (5 + 2\sqrt{6})$ (۳) $6^{400} (5 - 2\sqrt{6})$ (۴)

۲۱- عبارت $n^5 - 5n^3 + 4n$ بر کدام یک از اعداد داده شده، همواره بخش پذیر است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- ۱۱ (۱) ۱۲۰ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴)

۲۲- اگر $a + \frac{1}{x} = 2$ ، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

(مسابقات جوانی)

۲۳- به عدد مثبتی مانند t که در شرط $t^2 = t + 1$ صدق کند، «عدد طلایی» می‌گوییم. مقدار t^5 کدام است؟

- ۳t+۱ (۱) ۴t+۲ (۲) ۵t+۳ (۳) ۶t+۴ (۴)

(آزمون ورودی)

۲۴- ضریب x^3 در بسط $(x^2+x+1)(1+ax+bx^2)$ برابر ۵ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۲۵- در تجزیه چندجمله‌ای‌های $(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$ و $(x^6 - 1)$ کدام عامل مشترک وجود دارد؟

- (۱) $(x-1)^2$ (۲) $x+1$ (۳) x^2+1 (۴) $(x+1)^2$

۲۶- چندجمله‌ای $(x^2+2x+6)(x^2+2x-4)+9$ بر کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر بخش پذیر نیست؟

- (۱) x^2+2x+5 (۲) x^2+2x-3

- (۳) x^3+x^2+3x-5 (۴) x^2+2x+7

۲۷- مقدار عبارت $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$ به ازای $x = 0/5$ و $y = -1/5$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۲۸- هرگاه برای دو عدد حقیقی a و b داشته باشیم $0 < a < b$ ، کدام یک از نامساوی‌های زیر حتماً درست است؟ (انرژی اتمی)

- (۱) $ab < ab^2$ (۲) $ab < a^2b$ (۳) $ab < ab^3$ (۴) $ab < a^3b$

۲۹- اگر $\frac{x+1}{2} < \frac{5x+3}{4} \leq x + \frac{5}{2}$ باشد، آن گاه حدود x کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 5$ (۲) $-\frac{1}{3} \leq x < 7$ (۳) $-\frac{1}{3} < x \leq 7$ (۴) $-\frac{1}{2} \leq x < 5$

۳۰- مجموع ثلث و ربع عددی از مجموع نصف و خمس آن عدد کوچک تر است. آن عدد کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $-\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) صفر (۴) $-\frac{1}{25}$

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۵

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۷

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۸

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۹

۴ ۳ ۲ ۱ -۳۰

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۷

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۰

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۳

۴ ۳ ۲ ۱ -۲۴

۴ ۳ ۲ ۱ -۹

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۰

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۱

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۲

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۳

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۴

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۵

۴ ۳ ۲ ۱ -۱۶

۴ ۳ ۲ ۱ -۱

۴ ۳ ۲ ۱ -۲

۴ ۳ ۲ ۱ -۳

۴ ۳ ۲ ۱ -۴

۴ ۳ ۲ ۱ -۵

۴ ۳ ۲ ۱ -۶

۴ ۳ ۲ ۱ -۷

۴ ۳ ۲ ۱ -۸

شناسنامه سوالات بسته آزمون پایانی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	پاسخ	شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	پاسخ
۱	درجه یک عبارت جبری	۴	۱۶	شناخت اتحاد	۴
۲	ساده کردن عبارت جبری	۳	۱۷	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۲
۳	ساده کردن عبارت جبری	۱	۱۸	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۲
۴	ساده کردن عبارت جبری	۳	۱۹	اتحاد مزدوج	۳
۵	ساده کردن عبارت جبری	۲	۲۰	اتحاد مربع دو جمله‌ای - اتحاد مزدوج	۲
۶	مقدار عددی یک عبارت جبری	۲	۲۱	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحاد	۲
۷	مقدار عددی یک عبارت جبری	۲	۲۲	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۲
۸	مقدار عددی یک عبارت جبری	۳	۲۳	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۳
۹	مقدار عددی یک عبارت جبری	۴	۲۴	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۳
۱۰	حل معادله‌های جبری	۱	۲۵	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحاد	۲
۱۱	حل معادله‌های جبری	۴	۲۶	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحاد	۴
۱۲	حل معادله‌های خاص جبری	۴	۲۷	اتحاد مکعب و مربع دو جمله	۲
۱۳	حل مسئله با معادله	۲	۲۸	خواص نابرابری‌ها	۱
۱۴	حل مسئله با معادله	۳	۲۹	حل دستگاه نامعادلات	۳
۱۵	حل معادله‌های پارامتری	۴	۳۰	حل نامعادلات	۲

پاسخنامه

۱- گزینه «۴» بیش‌ترین درجه مربوط به $(x^2)^3(x^4)^2$ یعنی x^{26} است. لذا درجه‌ی این چندجمله‌ای برابر ۲۶ است.

۲- گزینه «۳» نکته: مربع نوعی لوزی است. پس برای محاسبه مساحت مربع می‌توان از فرمول مساحت لوزی استفاده کرد. پس داریم:

$$S = \frac{1}{2}(m+n) \times (m+n) = \frac{1}{2}(m^2 + mn + mn + n^2) = \frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2) = \frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{2} + mn$$

۳- گزینه «۱» ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم، سپس جایگذاری می‌کنیم:

$$2A - 3B - 2BC + AB + 2BC - AB = 2A - 3B = 2(2a^2 + b) - 3(3a - b^2) = 4a^2 + 2b - 9a + 3b^2$$

$$(a^2x + 4y^2)^2 = (a^2x)^2 + (4y^2)^2 + 2(a^2x)(4y^2) = a^4x^2 + 16y^4 + 8a^2xy^2 \quad (1) \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$(4y^2 - a^2x)^2 = (4y^2)^2 + (a^2x)^2 - 2(4y^2)(a^2x) = 16y^4 + a^4x^2 - 8a^2xy^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{کم کردن دو رابطه}]{(1)-(2)} a^4x^2 + 16y^4 + 8a^2xy^2 - (16y^4 + a^4x^2 - 8a^2xy^2)$$

$$= a^4x^2 + 16y^4 + 8a^2xy^2 - 16y^4 - a^4x^2 + 8a^2xy^2 = 16a^2xy^2$$

۵- گزینه «۲» با استفاده از خاصیت توزیع پذیری داریم:

$$x^2 + xy + xz - yx - y^2 - yz + zx + zy + z^2 = x^2 - y^2 + z^2 + 2xz \stackrel{y^2=xz}{=} x^2 - y^2 + z^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{(2a^2 - b)(2a^2 + b) - b^2}{-2a^4 + 2b^2 - 2a^4} = \frac{(2a^2)^2 - (b)^2 - b^2}{-4a^4 + 2b^2} = \frac{4a^4 - 2b^2}{-(4a^4 - 2b^2)} = -1$$

اتحاد مزدوج

همان‌طور که ملاحظه نمودید با ساده کردن عبارت به جواب نهایی رسیدیم و دیگر نیازی به جایگذاری مقادیر a و b نمی‌باشد.

۷- گزینه «۲» اگر $\frac{x}{y} = 3$ ، آن‌گاه $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$ ، بنابراین داریم: $4 \times (3) - 5 \times (\frac{1}{3}) = 12 - \frac{5}{3} = \frac{31}{3}$

۸- گزینه «۳»

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

۹- گزینه «۴» $x^y + x^5 - 12x^3 = x(x^6 + x^4 - 12x^2)$

$$\stackrel{x=\sqrt{3}}{\Rightarrow} \sqrt{3} [(\sqrt{3})^6 + (\sqrt{3})^4 - 12(\sqrt{3})^2] = \sqrt{3}(27 + 9 - 36) = \sqrt{3} \times 0 = 0$$

۱۰- گزینه «۱» داریم: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\left[\frac{4x}{6} - \frac{3(4x-1)}{6} \right]^{-1} = \left[\frac{4x - 12x + 3}{6} \right]^{-1} = \left[\frac{-8x + 3}{6} \right]^{-1} = \frac{6}{-8x + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{-8x + 3} = \frac{-3x}{4x^2 - 8x + 4} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 24x^2 - 48x + 24 = 24x^2 - 9x$$

$$\Rightarrow -48x + 24 = -9x \Rightarrow 39x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{39} = \frac{8}{13}$$

۱۱- گزینه «۴» $\frac{18x + 21}{9x + 2} = \frac{35 + 4x}{2x + 9} \Rightarrow (18x + 21)(2x + 9) = (9x + 2)(35 + 4x)$

$$\Rightarrow 36x^2 + 162x + 42x + 189 = 315x + 36x^2 + 70 + 8x \Rightarrow 204x - 323x = 70 - 189 \Rightarrow -119x = -119 \Rightarrow x = 1$$

۱۲- گزینه «۴» حاصل جمع چند عبارت مثبت برابر صفر شده است پس تک تک آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\left. \begin{aligned} m + L = 0 &\Rightarrow m = -L \\ m - n = 0 &\Rightarrow m = n \\ n + L = 0 &\Rightarrow n = -L \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = n = -L \Rightarrow \frac{2L - m}{n} = \frac{-2n - n}{n} = \frac{-3n}{n} = -3$$

۱۳- گزینه «۲» معادله این مسئله به صورت زیر است: (سرمایه‌اش را x فرض کنیم)

$$\text{پایان سال اول} \Rightarrow x + \frac{x}{4} - 10^y \Rightarrow \text{پایان سال دوم} = \frac{5}{4} \left(\frac{5}{4}x - 10^y \right) - 10^y = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x - \frac{3}{2} \times 10^y - 10^y = 2x \Rightarrow \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \times 10^y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{5}{4} \times 10^y \Rightarrow x = 5 \times 10^y = 10^1$$

۱۴- گزینه «۳» $1382 - (13xy) = x + y \Rightarrow 1382 - (1300 + 10x + y) = x + y$

$$82 - 10x - y = x + y \Rightarrow 82 = 11x + 2y \xrightarrow[\text{حدس و آزمایش}]{} x = 6, y = 8 \Rightarrow \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3a = a &\Rightarrow 2x_1 = -2a \Rightarrow x_1 = -a \\ 2x_2 + 3a = -a &\Rightarrow 2x_2 = -4a \Rightarrow x_2 = -2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = -3a \quad \text{گزینه ۱۵ «۴»}$$

گزینه ۱۶ «۴» فرض می‌کنیم x متغیر و a و b اعداد معلوم هستند و حاصل طرف راست تساوی را به دست می‌آوریم:

$$3 + a(x-2) + b(x-2)^2 = 3 + ax - 2a + b(x^2 - 4x + 4) = 3 + ax - 2a + bx^2 - 4bx + 4b$$

$$= (3 - 2a + 4b) + (a - 4b)x + bx^2 \Rightarrow 1 + 1x + 2x^2 = (3 - 2a + 4b) + (a - 4b)x + bx^2$$

می‌دانیم که در یک اتحاد جملات متشابه دو طرف تساوی، نظیر به نظیر با هم برابرند، پس داریم:

$$\begin{cases} b = 2 \\ a - 4b = 1 \xrightarrow{b=2} a - 8 = 1 \Rightarrow a = 9 \\ b = 2, a = 9 \Rightarrow 3 - 18 + 8 = -7 \end{cases}$$

جمله طرف راست به صورت $-7 + x + 2x^2$ درمی‌آید که با چندجمله‌ای طرف چپ برابر نیست. بنابراین به ازای هیچ مقداری از a و b این تساوی یک اتحاد نیست.

گزینه ۱۷ «۲»

$$2a - 3b = 1 \Rightarrow (2a - 3b)^2 = 1^2 \Rightarrow (4a^2 + 9b^2 - 12ab = 1) \times 2$$

$$8a^2 - 24ab + 18b^2 = 2$$

گزینه ۱۸ «۲» ابتدا با استفاده از مربع سه جمله‌ای عبارت را ساده می‌کنیم.

$$(a-b+c)^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2ac + 2(-b)c = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$\xrightarrow{\text{از عبارت مسئله داریم}} a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 2a(c-b) = 2bc \Rightarrow a = \frac{bc}{c-b}$$

گزینه ۱۹ «۳» ابتدا صورت و مخرج عبارت A را در $(2-1)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. سپس با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{(2-1) \times (2+1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)}{(2-1)} = \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)}{(2-1)} = \frac{(2^4-1)(2^4+1) \dots (2^{64}+1)}{(2-1)}$$

$$\Rightarrow \text{طبق همین الگو داریم} \Rightarrow \frac{(2^{64}-1)(2^{64}+1)}{1} = 2^{128} - 1$$

گزینه ۲۰ «۲»

$$(3\sqrt{12} + 2\sqrt{18})^{400} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201} = (3\sqrt{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sqrt{6})^{400} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201}$$

$$= (\sqrt{6})^{400} (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^{400} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201} = \sqrt{6} ((3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2)^{200} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201}$$

$$= 6^{200} (9 + 12\sqrt{6} + 12)^{200} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201} = 6^{200} (30 + 12\sqrt{6})^{200} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{201}$$

$$= 6^{200} \times 6^{200} (\sqrt{5} + 2\sqrt{6})^{200} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^{200} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})$$

$$= 6^{400} \frac{(25 - 24)^{200}}{=1} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6}) = 6^{400} (\sqrt{5} - 2\sqrt{6})$$

گزینه ۲۱ «۲»

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n} = n(n^4 - 5n^2 + 4) \Rightarrow \text{اتحاد جمله مشترک} \Rightarrow \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{\text{اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج فاکتور از } n}$$

$$= n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2) = (n-2)(n-1)(n)(n+1)(n+2)$$

عبارت به دست آمده از تجزیه به صورت حاصل ضرب ۵ عدد طبیعی متوالی است و این را می‌دانیم که در ضرب ۵ عدد طبیعی متوالی حتماً یکی از آن‌ها بر ۵ و دیگری بر ۴، دیگری بر ۳ و دیگری بر ۲ بخش پذیر است و چون $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ می‌باشد. پس عبارت مورد نظر حتماً بر ۱۲۰ بخش پذیر است.

گزینه ۲۲ «۲»

$$x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^3 = -8$$

$$x^3 + 3x^2(\frac{1}{x}) + 3x(\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x^3} = -8 \Rightarrow x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = -8$$

$$\Rightarrow x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = -8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = -8 + 6 = -2$$

راه حل تستی:

$$x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (-1)^3 + \frac{1}{(-1)^3} = -2$$

۲۳- گزینه «۳» $t^2 = t+1$ می‌باشد و می‌دانیم $t^2 \times t^2 \times t = t^5$ می‌شود، بنابراین داریم:

$$(t+1) \times (t+1) \times t = (t^2 + 2t + 1) \times t = t \times (t+1 + 2t+1) = t \times (3t+2) = 3t^2 + 2t = 3(t+1) + 2t = 3t+3+2t = 5t+3$$

اتحاد مربع دو جمله

۲۴- گزینه «۳» برای به دست آوردن جواب کافی است جملاتی را که x^3 تولید می‌کنند ضرب نماییم.

$$(x^2 + x + 1)(1 + ax + bx^2) \cong x^3(ax) + x(bx^2) = \frac{ax^3 + bx^3}{\text{فاکتور از } x^3} = x^3(a+b) \Rightarrow a+b = 5$$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

۲۵- گزینه «۲»

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3 = ((x-1)(x+1))^3 = (x-1)^3(x+1)^3$$

بنابراین عامل‌های مشترک در تجزیه این دو عبارت $x+1$ و $x-1$ هستند.

۲۶- گزینه «۴» می‌دانیم که یک چندجمله‌ای بر همه عامل‌های تجزیه‌اش بخش‌پذیر است، بنابراین عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(x^2 + 2x + 6)(x^2 + 2x - 4) + 9}{A} = \frac{(A+6)(A-4) + 9}{A} = \frac{A^2 + 2A - 24 + 9}{A} = \frac{A^2 + 2A - 15}{A}$$

اتحاد جمله مشترک

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (A+5)(A-3) = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x - 3) = (x^2 + 2x + 5)(x+3)(x-1)$$

اتحاد جمله مشترک

با توجه به تجزیه انجام گرفته، چند جمله‌ای بر $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ و $(x^2 + 2x + 5)(x-1) = x^3 + x^2 + 3x - 5$ بخش‌پذیر است.

۲۷- گزینه «۲» ملاحظه می‌کنیم که در صورت، اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای و در مخرج، اتحاد مکعب تفاضل دو جمله وجود دارد،

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{1}{x-y} \xrightarrow{x = \frac{1}{2}, y = \frac{-3}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (-\frac{3}{2})} = \frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

بس داریم:

۲۸- گزینه «۱» چون $a > 0$ و $b < 0$ بنابراین ab یک عدد منفی و ab^2 یک عدد مثبت است و می‌دانیم که حتماً یک عدد منفی از یک عدد مثبت کوچک‌تر است.

۲۹- گزینه «۳» ابتدا نامعادله را به یک دستگاه نامعادلات تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5x+3}{4} \leq x + \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 5x+3 \leq 4x+10 \Rightarrow 5x-4x \leq 10-3 \Rightarrow x \leq 7 \quad (1) \\ \frac{x+1}{2} < \frac{5x+3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 2(x+1) < 5x+3 \Rightarrow 2x+2 < 5x+3 \Rightarrow -3x < 1 \xrightarrow{\div (-3)} x > \frac{-1}{3} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow \frac{-1}{3} < x \leq 7$$

۳۰- گزینه «۲» با فرض x برای عدد مورد نظر داریم:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} < \frac{x}{2} + \frac{x}{5} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{4x+3x}{12} < \frac{5x+2x}{10} \Rightarrow \frac{7x}{12} < \frac{7x}{10} \xrightarrow{\text{طرفین } \times 60} 35x < 42x \Rightarrow 42x - 35x > 0$$

می‌بینیم که فقط عدد گزینه (۲) در این نامساوی صدق می‌کند.

به مرحله آزمون غنی‌سازی بروید.

بله

آیا به تمام سؤالات آزمون پایانی به درستی پاسخ داده‌اید؟

خیر

متناسب با زیر موضوعات مربوط به سؤالاتی که به درستی پاسخ نداده‌اید، به تمرینات معلم خود مراجعه و آن‌ها را حل کنید.

مجدداً سؤالاتی را که در آزمون پایانی مشکل داشتید حل کنید.

آزمون غنی سازی

تعمیم اتحاد مربع یک چند جمله‌ای:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 =$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + (2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n) + (2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n) + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

اتحاد بسط دو جمله‌ای نیوتن:

$$(1) (a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots + b^n$$

$$(2) (a - b)^n = a^n - \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots + (-1)^n b^n$$

همان‌طور که می‌بینیم در جملات بسط، توان a از n شروع می‌شود و به صفر ختم می‌شود و در هر جمله نسبت به جمله قبل از درجه a یکی کم و به درجه b اضافه می‌شود. بدین ترتیب توان b از صفر شروع و به n ختم می‌شود. ضرب هر جمله به این ترتیب به دست می‌آید که ضرب جمله قبل را در توان a از همان جمله ضرب کرده و بر تعداد جملاتی که تا آن جمله نوشته شده تقسیم می‌کنیم.

در رابطه‌های بالا به ازای هر عدد طبیعی m داریم:

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب بسط کافی است به جای متغیرها مقدار عددی یک را جایگذاری کنیم. حاصل عبارت بسط همان مجموع ضرایب بسط است.

(انرژی اتمی)

۱- اگر $abc = 2$ باشد، حاصل $\frac{b+6}{3ac+1}$ کدام است؟

- (۱) a (۲) b (۳) c (۴) 1

۲- دو عدد x و y به نسبت a و b ($0 < a < b$) هستند. اگر $x + y = c$ باشد، آن‌گاه از x و y آن‌که کوچک‌تر است برابر

(انرژی اتمی)

است با:

- (۱) $\frac{ac}{b}$ (۲) $\frac{bc}{a+b}$ (۳) $\frac{bc}{b-c}$ (۴) $\frac{ac}{a+b}$

(علامه طباطبائی)

۳- عبارت $a + bc$ و $(a+b)(a+c)$ در چه صورتی با هم برابرند؟

- (۱) $a + b + c = 0$ (۲) $a + b + c = 1$ (۳) $a = bc$ (۴) $b = 2ac$

(انرژی اتمی)

۴- هر گاه داشته باشیم $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ ، $(d+a \neq 0, b+c \neq 0)$ آن‌گاه:

- (۱) باید $a = c$ باشد (۲) باید $a + b + c + d \neq 0$ (۳) باید $a = c$ یا $a + b + c + d = 0$ (۴) باید $a(b+c+d) = c(b+c+d)$

۵- حاصل $(y \neq 0)x^y$ را پس از دو برابر کردن x و y با z نشان می‌دهیم. اگر z برابر با ضرب x^y در a^y باشد، a برابر

(انرژی اتمی)

است با:

- (۱) 2 (۲) $2x$ (۳) $4x$ (۴) 4

۶- اعداد طبیعی x_1, x_2, x_3 (از کوچک به بزرگ) متوالی بوده، حاصل $x_3x_2 - x_2x_1$ برابر است با:

(سراسری)

- (۱) $2x_1$ (۲) x_1x_3 (۳) $2x_2$ (۴) $x_1 + x_2$

(سراسری انسانی)

۷- خلاصه شده عبارت $(x - 5 + \frac{6}{x+2}) \div (1 - \frac{1}{x+2})$ کدام است؟

- (۱) $x + 3$ (۲) $x - 3$ (۳) $x - 4$ (۴) $x - 6$

۸- اگر $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$ و $\frac{xy}{y+z} = \frac{1}{7}$ و $\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}$ برابر است با:

(آزمون ورودی)

- (۱) 16 (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) 17 (۴) $\frac{1}{17}$

(آزمون ورودی)

۹- عمل $*$ را به صورت $a * b = b^2 + 2$ تعریف می‌کنیم، حاصل عبارت $((a * b) * b) - 2$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) b^2 ۳) $b^2 - 2$ ۴) $b^2 + 2$

(آزمونی اتنی)

۱۰- اگر داشته باشیم $a * b = (a^2 b - ab^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ، حاصل $4 * (2 * 3)$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۹ ۳) $a + b$ ۴) ab

۱۱- ساده شده عبارت $(a^3 + a^2 - a - 1)^2$ شامل کدام گزینه زیر است؟

- ۱) $6a^6$ ۲) $5a^6$ ۳) $-4a^6$ ۴) $-a^6$

۱۲- حاصل عبارت $(2a + b)^5$ برابر است با:

۱) $32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$ ۲) $32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$

۳) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$ ۴) $80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$

۱۳- مجموع ضرایب بسط $(2x^3 - x - 1) + (2x^3 - x - 1) + (2x^3 - x - 1) + \dots$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴- ساده شده عبارت $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$ دارای چند جمله است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

(آزمون ورودی)

۱۵- اگر $x^2 + x = 1$ ، $x^4 + x^2$ کدام است؟

- ۱) $8x - 13$ ۲) $8x + 13$ ۳) $13x - 8$ ۴) $13x + 8$

۱۶- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $x^3 + 2x^2y + xy^2 = 100$ و $y^3 + 2xy^2 + x^2y = 25$ ، مقدار xy کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۱۷- اگر $A = x + \frac{1}{x}$ ، مقدار عبارت $x^6 + \frac{1}{x^6}$ بر حسب A کدام است؟

۱) $A^6 - 7A^4 + 14A^2 - 7A^2$ ۲) $A^6 - 7A^4 + 14A^2 - 7A$

۳) $A^6 + 7A^4 - 14A^2 + 7A$ ۴) $A^6 + 7A^4 - 14A + 7A^2$

۱۸- علامت عبارت $\frac{x}{6}(x+2)(x-3)$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی $A = \{x | x > 3\}$ و $B = \{x | x < -4\}$ چگونه است؟

۱) روی A منفی و روی B مثبت است.

۲) روی A و B منفی است.

۳) روی A مثبت و روی B منفی است.

۴) روی A و B مثبت است.

۱۹- ساده شده عبارت $(2x + y + 1)(4x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - y)$ کدام گزینه است؟

- ۱) $8x^3 + y^3 - 6xy + 1$ ۲) $x^3 + 8y^3 - xy + 6$ ۳) $8x^3 + y^2 - 6x + y$ ۴) $8x^3 + 8y^2 - 6x + y$

۲۰- اگر $2ax + 3by = 0$ باشد، ساده شده عبارت $(4a^2 + b^2)(x^2 + 9y^2)$ کدام است؟

- ۱) $6ay - bx$ ۲) $(ay - 6bx)^2$ ۳) $ay - 6bx$ ۴) $(6ay - bx)^2$

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۶ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۱ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۶ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱ |
| <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۷ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۲ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۷ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۲ |
| <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۸ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۳ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۸ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۳ |
| <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۹ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۴ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۹ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۴ |
| <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۲۰ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۵ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۰ | <input type="checkbox"/> ۴ | <input type="checkbox"/> ۳ | <input type="checkbox"/> ۲ | <input type="checkbox"/> ۱ | -۵ |

شناسنامه سوالات آزمون غنی‌سازی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	ساده کردن عبارت جبری	۲	۲	۱۱	تعمیم اتحاد مربع چند جمله‌ای	۴	۴
۲	ساده کردن عبارت جبری	۴	۴	۱۲	اتحاد بسط دو جمله‌ای نیوتن	۲	۲
۳	معادله جبری	۲	۲	۱۳	اتحاد بسط دو جمله‌ای نیوتن	۴	۴
۴	معادله جبری	۳	۳	۱۴	اتحاد یک جمله مشترک و تعمیم آن	۴	۴
۵	حل معادله پارامتری	۳	۳	۱۵	کاربرد اتحادها	۳	۳
۶	ساده کردن عبارت جبری	۳	۳	۱۶	کاربرد اتحادها	۱	۱
۷	ساده کردن عبارت جبری	۳	۳	۱۷	کاربرد اتحادها	۲	۲
۸	ساده کردن عبارت جبری	۱	۱	۱۸	تعیین علامت عبارت جبری	۳	۳
۹	عملگرها و عبارت‌های جبری	۲	۲	۱۹	اتحاد اویلر	۱	۱
۱۰	عملگرها و عبارت‌های جبری	۲	۲	۲۰	اتحاد لاگرانژ	۴	۴

پاسخنامه

$$abc = 2 \Rightarrow (ac)b = 2 \Rightarrow ac = \frac{2}{b}$$

۱- گزینه «۲»

در عبارت $\frac{b+6}{3ac+1}$ به جای ac عبارت $\frac{2}{b}$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{b+6}{3 \times \frac{2}{b} + 1} = \frac{b+6}{\frac{6+b}{b}} = \frac{(b+6)b}{(6+b)} = b$$

۲- گزینه «۴» می‌دانیم $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ و چون $a < b$ پس $x < y$. بنابراین:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x \Rightarrow x + \frac{b}{a}x = c \Rightarrow x(1 + \frac{b}{a}) = c \Rightarrow x = \frac{c}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{ac}{a+b}$$

۳- گزینه «۲» $(a+b)(a+c) = a+bc \Rightarrow a^2 + a(b+c) + bc = a+bc \Rightarrow a(a+b+c) = a \Rightarrow a+b+c = 1$

۴- گزینه «۳» اگر $a = c$ باشد، هریک از کسرهای دو طرف تساوی برابر ۱ خواهند شد، همچنین اگر $a+b+c+d = 0$ باشد،

می‌توان نتیجه گرفت که $a+b = -(c+d)$ و $b+c = -(a+d)$ و با جایگذاری این مقادیر دو طرف مساوی می‌شوند.

۵- گزینه «۳» طبق معلومات مسئله $z = (2x)^{2y}$ هم‌چنین: $z = x^y \cdot a^y = (xy)^a$

$$z = (2x)^{2y} = ((2x)^2)^y = (4x^2)^y = (xa)^y \Rightarrow 4x^2 = xa \Rightarrow a = 4x$$

حال مقدار a را باید محاسبه کنیم:

۶- گزینه «۳» نکته: اگر در عبارت زیر x را کوچک‌ترین عدد در نظر بگیریم، داریم:

$$x, x+1, x+2, x+3, \dots$$

نکته: اعداد طبیعی متوالی

$$x, x+2, x+4, x+6, \dots$$

اعداد فرد طبیعی متوالی

$$x, x+2, x+4, x+6, \dots$$

اعداد زوج طبیعی متوالی

حال اگر x_1 را کوچک‌ترین عدد طبیعی در بین سه عدد داده شده در نظر بگیریم، پس $x_2 = x_1 + 1$ و $x_3 = x_1 + 2$ می‌باشد. داریم:

$$(x_1 + 2)(x_1 + 1) - (x_1 + 1)x_1 = x_1^2 + x_1 + 2x_1 + 2 - x_1^2 - x_1 = 2x_1 + 2 = 2(x_1 + 1) = 2x_2$$

۷- گزینه «۳»

$$(x-5 + \frac{6}{x+2}) \div (1 - \frac{1}{x+2}) = \frac{(x-5)(x+2) + 6}{x+2} \div \frac{x+2-1}{x+2}$$

$$= \frac{x^2 - 3x - 10 + 6}{x+2} \times \frac{x+2}{x+1} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} \times \frac{x+2}{x+1} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \frac{(x-4)(x+1)}{x+1} = x-4$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = 5 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 5$$

۸- گزینه «۱»

و از رابطه‌های دیگر داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6 \end{cases} \xrightarrow[\text{معادله با هم جمع طرفین}]{\text{جمع طرفین}} 2 \times (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 18 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9 \xrightarrow{(1)} \frac{1}{z} = 9 - 5 = 4$$

$$3 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \times 2 + 2 \times 3 + 4 = 12 + 4 = 16 \quad \text{هم‌چنین به دست می‌آید: } \frac{1}{x} = 3 \text{ و } \frac{1}{y} = 2 \text{ پس داریم:}$$

۹- گزینه «۲» چون $a * b = b^2 + 2$ بنابراین a نقشی در جواب ندارد، بنابراین:

$$\left((a * b) * b \right) - 2 = b^2 + 2 - 2 = b^2$$

۱۰- گزینه «۲» ابتدا حاصل عبارت $(a * b)$ را ساده می‌کنیم، برای این منظور در عبارت $(a^2 b - ab^2)$ از ab فاکتور و در عبارت

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{ مخرج مشترک می‌گیریم.}$$

$$a * b = ab(a-b) \left(\frac{b+a}{ab} \right) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$3 * 2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \quad \text{و} \quad 5 * 4 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

۱۱- گزینه «۴»

طبق نکته بالا داریم: $(a^3 + a^2 - a - 1)^2 = (a^3)^2 + (a^2)^2 + (-a)^2 + (-1)^2 + 2a^3 a^2 - 2a^3 a - 2a^3(1) - 2a^2 a - 2a^2(1) + 2a(1)$

$$+ 2a(1) = a^6 + a^4 + a^2 + 1 + 2a^5 - 2a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a = a^6 + 2a^5 - a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1$$

۱۲- گزینه «۲» طبق نکته بالا داریم:

$$(2a+b)^5 = (2a)^5 + \frac{5}{1!}(2a)^4 b + \frac{5(5-1)}{2!}(2a)^3 b^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2a)^2 b^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2a) b^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2a)^0 b^5 = 32a^5 + 80a^4 b + 80a^3 b^2 + 40a^2 b^3 + 10ab^4 + b^5$$

$$x = 1 \Rightarrow (2(1)^2 + 1 - 2)^{99} + (2(1)^3 - 1 - 1) + 3 = 1^{99} + 0 + 3 = 4$$

۱۳- گزینه «۴»

۱۴- گزینه «۴»

تعمیم اتحاد یک جمله مشترک:

۱- اگر حاصل ضرب سه عبارت با جمله مشترک x را بدهند، خواهیم داشت:

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

۲- اگر حاصل ضرب چهار عبارت با جمله مشترک x را بدهند، خواهیم داشت:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

طبق تعمیم شماره (۲) داریم:

$$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) = x^4 + (-2+3-4+5)x^3 + [(-2) \times 3 + (-2)(-4) + (-2) \times 5 + 3 \times (-4) + (3 \times 5) + (-4 \times 5)]x^2 + [(-2) \times 3 \times (-4) + (-2) \times 3 \times 5 + (-2) \times (-4) \times 5 + 3 \times (-4) \times 5]x + (-2) \times 3 \times (-4) \times 5 = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$$

پس ساده شده عبارت دارای ۵ جمله است.

۱۵- گزینه «۳» $x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow (x^2)^2 = (1-x)^2 \Rightarrow x^4 = 1 + \frac{x^2}{x} - 2x \Rightarrow x^4 = 1 + \frac{1-x}{x} - 2x = 2 - 3x$

از یک سو می دانیم $x^4 = x^2 \times x^2$ و همچنین $x^3 = x^2 \times x$ می باشد، پس می توانیم بنویسیم:

$$x^4 = x^2 \times x^2 \times x = (2-3x)(1-x)x = (2-3x)(x-x^2) \xrightarrow{x^2=1-x} (2-3x)(x-1+x) = 4x - 2 - 6x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow x^4 = 7x - 2 - 6x^2$$

$$\xrightarrow{x^2=1-x} x^4 = 7x - 2 - 6(1-x) = 7x - 2 - 6 + 6x = 13x - 8$$

۱۶- گزینه «۱» اگر طرفین دو عبارت را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 125 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله}} (x+y)^3 = 5^3 \Rightarrow x+y = 5 \quad (1)$$

اکنون طرفین دو عبارت را از هم کم می کنیم:

$$(x^3 + 2x^2y + xy^2) - (y^3 + 2xy^2 + x^2y) = 75$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - y^3}{\text{فاکتور از } xy} + \frac{x^2y - xy^2}{\text{اتحاد چاق و لاغر}} = \frac{(x-y)(x^2 + y^2 + xy)}{\text{فاکتور}} + xy(x-y)$$

$$= (x-y)(x^2 + y^2 + xy + xy) = (x-y)(x^2 + y^2 + 2xy) = (x-y)(x+y)^2 \xrightarrow{x+y=5} 25(x-y)$$

$$\Rightarrow 25(x-y) = 75 \Rightarrow x-y = 3 \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) اگر $x = 1$ و $y = 4$ در نظر بگیریم، مجموع دو عدد ۵ و تفاضل آن ها ۳ خواهد بود که در نهایت $xy = 1 \times 4 = 4$ می شود.

۱۷- گزینه «۲» $(x + \frac{1}{x}) = A \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x + \frac{1}{x})^2 = A^2 \Rightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = A^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = A^2$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 - 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (A^2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = A^4 + 4 - 4A^2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = A^4 - 4A^2 + 2 \quad (1)$$

از طرفی با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1) = A(A^2 - 2 - 1) = A^3 - 3A \quad (2)$$

با ضرب رابطه های (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow x^7 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^7} = A^7 - 3A^5 - 4A^5 + 12A^3 + 2A^3 - 6A \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} = A^7 - 7A^5 + 14A^3 - 7A$$

۱۸- گزینه «۳» در مجموعه A، $x > 3$ است، بنابراین داریم:

$$x > 3 \xrightarrow{+4 \text{ طرفین و } >} \frac{x}{4} > \frac{3}{4} \xrightarrow{\frac{3}{4} >} \frac{x}{4} > 0$$

$$x > 3 \xrightarrow{+2 \text{ طرفین}} x+2 > 3+2 \Rightarrow x+2 > 5 \xrightarrow{>} x+2 > 0$$

$$x > 3 \xrightarrow{-3 \text{ طرفین}} x-3 > 3-3 \Rightarrow x-3 > 0$$

بنابراین هر سه عبارت در A مثبت هستند پس حاصل ضرب آنها نیز روی مجموعه A مثبت می‌شود. حال در مجموعه B،

$$x < -4 \xrightarrow{+4 \text{ طرفین و } >} \frac{x}{4} < -\frac{4}{4} \Rightarrow \frac{x}{4} < -1 \xrightarrow{-1 <} \frac{x}{4} < 0$$

بنابراین:

$$x < -4 \xrightarrow{+2 \text{ طرفین}} x+2 < -4+2 \Rightarrow x+2 < -2 \xrightarrow{-2 <} x+2 < 0$$

$$x < -4 \xrightarrow{-3 \text{ طرفین}} x-3 < -4-3 \Rightarrow x-3 < -7 \xrightarrow{-7 <} x-3 < 0$$

مشاهده می‌کنیم که این بار عبارت به صورت حاصل ضرب سه عدد منفی می‌شود که حاصل منفی است. بنابراین عبارت روی مجموعه B منفی است.

۱۹- گزینه «۱»

اتحاد اویلر: به ازای هر سه عدد حقیقی مانند a و b و c داریم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\begin{aligned} & \overset{a}{(2x+y+1)} \overset{b}{((2x)^2+y^2+1^2)} \overset{c}{-(2x)(y)-(2x)(1)-y(1)} \\ & \xrightarrow[\text{اویلر}]{\text{اتحاد}} (2x)^3+y^3+1^3-3(2x)(y)(1) = 8x^3+y^3+1-6xy \end{aligned}$$

۲۰- گزینه «۴»

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

اتحاد لاگرانژ:

$$\begin{aligned} (4a^2+b^2)(x^2+9y^2) &= [(2a)^2+b^2][x^2+(3y)^2] \xrightarrow{\text{اتحاد لاگرانژ}} ((2a)x+b(3y))^2 + ((2a)(3y)-bx)^2 \\ &= (2ax+3by)^2 + (6ay-bx)^2 = (6ay-bx)^2 \end{aligned}$$