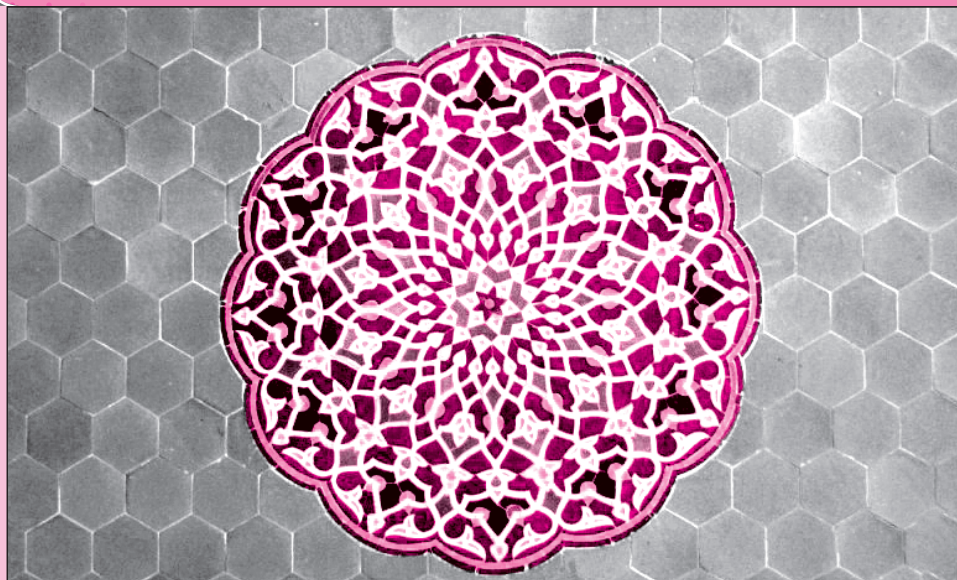


فصل

۴

هندسه و استدلال



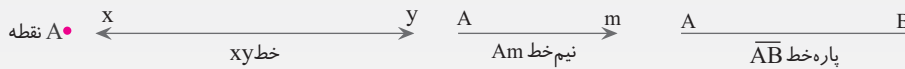
در پایان این فصل دانش آموز باید بتواند:

- ◀ پاره‌خط‌ها را نام‌گذاری و مقایسه کند.
- ◀ روابط بین پاره‌خط‌ها را بشناسد.
- ◀ نام‌گذاری زاویه‌ها و روابط بین زاویه‌ها را انجام دهد.
- ◀ انواع چندضلعی را بشناسد.
- ◀ با تبدیلات هندسی (انتقال، دوران و قرینه) شکل‌ها را جابه‌جا کند.
- ◀ شکل‌های هم‌نهشت را بشناسد و با توجه به تبدیلات، شکل‌های هم‌نهشت را رسم کند.

روابط بین پاره‌خطها و زاویه‌ها

روابط بین پاره‌خطها

قرارداد: برای نمایش و نام‌گذاری نقطه، خط، پاره‌خط و نیم‌خط به صورت زیر عمل می‌کنیم:



فعالیت: با توجه به قراردادهای بالا شکل‌های زیر را نام‌گذاری کنید.



فعالیت: در شکل مقابل رابطه‌ی $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$ برقرار است. رابطه‌های زیر را کامل کنید.

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \dots\dots\dots$$

$$\overline{AD} - \overline{CD} = \dots\dots\dots$$

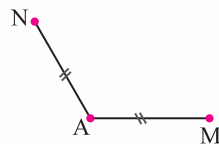
$$\overline{AC} - \dots\dots\dots = \overline{BC}$$

فعالیت: منوچهر مثلثی رسم کرد و با اندازه‌گیری ضلع‌های آن نتیجه گرفت که مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع دیگر بزرگ‌تر است. به نظر شما آیا این رابطه در همه مثلث‌ها برقرار است؟

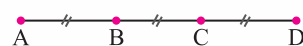
برای نشان دادن تساوی دو ضلع مانند شکل زیر عمل می‌کنیم:



علامت‌گذاری (الف)



تساوی جبری (ب) $\overline{AM} = \overline{AN}$



فعالیت: الف. با توجه به شکل زیر در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

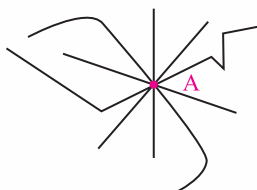
$$\overline{AC} = 2 \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \dots\dots\dots \overline{AD}$$

$$\overline{BD} = \dots\dots\dots \overline{CD}$$

$$\overline{AC} = \dots\dots\dots \overline{AD}$$

ب. در شکل بالا، پاره‌خط $\overline{BD}$ با کدام پاره‌خط مساوی است؟



از یک نقطه بی‌شمار خط می‌گذرد.



از دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد.



فعالیت: با توجه به عبارتهای داده‌شده، جاهای خالی را پر کنید.

علی بزرگ‌تر از رضا است.
رضا بزرگ‌تر از حسن است.

زهرا با مریم هم‌سن است.
سن سارا نصف سن زهرا است.

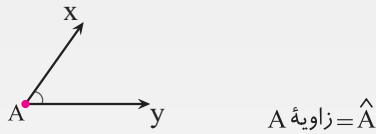
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{CD} > \overline{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots > \dots\dots\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{EF} \\ \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots$$

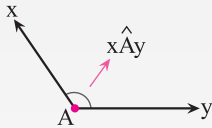
روابط بین زاویه‌ها

برای نام گذاری زاویه‌ها به دو روش عمل می‌کنیم:

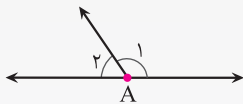
۱. نام گذاری زاویه با حرف رأس



۲. نام گذاری زاویه با سه حرف (حرف رأس، وسط نوشته می‌شود).

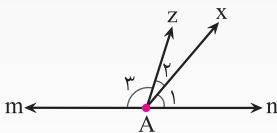


اگر یک زاویه به چند قسمت تقسیم شده باشد، می‌توانیم با عدد یا حرف نام گذاری کنیم:



$$\hat{1} = \hat{A}_1, \quad \hat{2} = \hat{A}_2$$

فعالیت: الف. با توجه به شکل مقابل، زاویه‌های خواسته شده را با سه حرف نام گذاری کنید.



$$\hat{1} = \dots, \quad \hat{2} = \dots, \quad \hat{3} = \dots$$

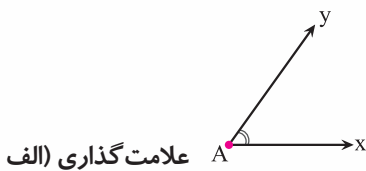
در جاهای خالی نام زاویه مناسب را بنویسید.

$$\hat{n}Ax + \hat{x}Az = \dots$$

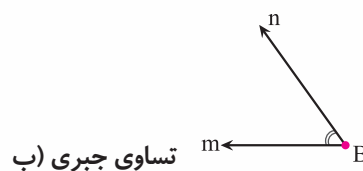
$$\hat{m}Ax - \hat{m}Az = \dots$$

$$\hat{n}Ax + \dots = \hat{m}An$$

برای نمایش دو زاویه مساوی مانند شکل زیر عمل می‌کنیم:



علامت گذاری (الف)



تساوی جبری (ب)

$$\hat{A} = \hat{B}$$

یادآوری

* به دو زاویه که جمع آن‌ها 90° باشد دو زاویه متمم گویند، مانند دو زاویه 70° و 20° .

* به دو زاویه که جمع آن‌ها 180° باشد دو زاویه مکمل گویند، مانند دو زاویه 150° و 30° .

* به دو زاویه مانند $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ در شکل مقابل، زاویه‌های متقابل به رأس می‌گوییم.

* زاویه‌های متقابل به رأس با هم مساوی‌اند. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

* مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

* زاویه نیم‌صفحه > زاویه باز > زاویه قائم > زاویه تند

فعالیت: الف. در چندضلعی‌های زیر کدام یک حداقل یک زاویه بزرگ‌تر از 180° دارند؟



(a)

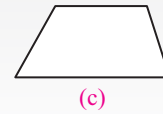
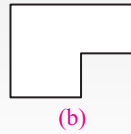


(b)



(c)

ب. در چندضلعی‌های زیر کدام یک زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۱۸۰° ندارند؟



به چندضلعی‌ای که هیچ زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۱۸۰° ندارد، **ممدب (کوژ)** می‌گویند.



به چندضلعی‌ای که حداقل یک زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۱۸۰° داشته باشد، چندضلعی **مقعر (کاو)** می‌گویند.

به چندضلعی‌هایی که همه‌ی ضلع‌های آن با هم و زاویه‌های آن نیز با هم مساوی باشند، **چندضلعی منتظم** می‌گوییم. مانند مربع که یک چهارضلعی منتظم است.

تمرین

۱. عبارات درست را با $\checkmark$ و نادرست را با $\times$ مشخص کنید.

الف. از دو نقطه بی‌شمار خط راست می‌گذرد.

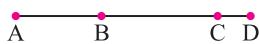
ب. مکمل یک زاویه باز از 90° بیشتر است.

پ. اگر روی خطی سه نقطه وجود داشته باشد، آن خط دارای ۳ پاره خط است.

ت. هیچ مربعی مقعر نیست.

روابط بین پاره‌خط‌ها

۲. در شکل مقابل $\overline{AD} = ۱۰ \text{ cm}$ ، $\overline{AB} = ۴ \text{ cm}$ و $\overline{CD} = ۱ \text{ cm}$ است. اندازه‌ی پاره‌خط‌های زیر را بنویسید.



الف) $\overline{BC} = \dots\dots\dots$

ب) $\overline{AC} = \dots\dots\dots$

پ) $\overline{BD} = \dots\dots\dots$

۳. با توجه به شکل مقابل در جاهای خالی پاره‌خط مناسب بنویسید.



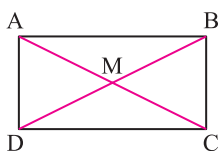
الف) $\overline{AM} + \overline{ME} = \dots\dots\dots$

ب) $\overline{AF} - \overline{NF} = \dots\dots\dots$

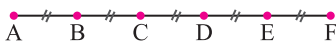
پ) $\overline{AE} - \dots\dots\dots = \overline{AM}$

ت) $\overline{AF} - \overline{MN} = \overline{AM} + \dots\dots\dots$

۴. در شکل مقابل رابطه‌ی $\overline{AM} + \overline{MC} = \overline{AC}$ برقرار است. چهار رابطه‌ی درست دیگر بنویسید.



۵. با توجه به شکل مقابل کدام رابطه‌ها درست هستند؟



$\overline{AF} = ۵\overline{AB}$

$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AF}$

$\overline{AC} < \overline{CF}$

$\overline{AE} = ۴\overline{CD}$

$\overline{AD} > \overline{DF}$



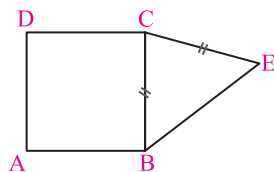
۶. یک خط رسم کنید و نقاط M, N, P, R را روی آن طوری نامگذاری کنید که رابطه $MP + PR = MN - RN$ درست باشد.

۷. در هر قسمت با توجه به رابطه‌های داده‌شده جای خالی را کامل کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AE} = \overline{EF} \\ \overline{MN} = \frac{1}{3} \overline{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AB} \\ \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \overline{AB} > \overline{CD} \\ \overline{MN} = \overline{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{MN} < \overline{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots$$

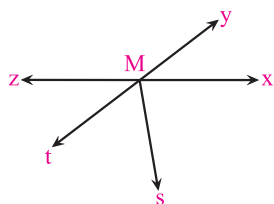
۸. الف. اگر روی یک خط ۷ نقطه قرار دهیم چند پاره‌خط و چند نیم‌خط به وجود می‌آید؟

ب. در شکل مقابل یک مربع و یک مثلث متساوی‌الساقین دیده می‌شود. چرا $\overline{CE} = \overline{AB}$ ؟



زاویه‌ها

۹. با توجه به شکل تساوی‌های زیر را کامل کنید.



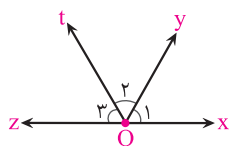
الف) $\widehat{xMy} + \widehat{yMz} = \dots\dots\dots$

ب) $\widehat{xMz} - \dots\dots\dots = \widehat{xMs}$

پ) $\widehat{zMt} + \widehat{tMs} = \dots\dots\dots$

۱۰. در شکل مقابل زاویه‌های $\widehat{O_1}$ ، $\widehat{O_2}$ و $\widehat{O_3}$ مساوی هستند.

الف. جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.



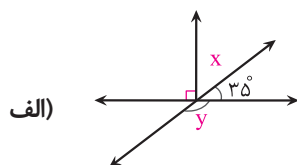
الف) $\widehat{xOz} = \dots\dots\dots \widehat{xOy}$

ب) $\widehat{xOy} = \dots\dots\dots \widehat{tOy}$

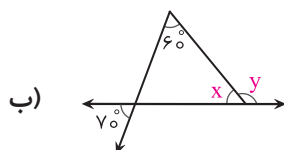
پ) $\widehat{zOy} = \dots\dots\dots \widehat{xOz}$

ب. زاویه $\widehat{xOt}$ با کدام زاویه مساوی است؟

۱۱. در هر یک از شکل‌های زیر اندازه زاویه‌های $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ را به دست آورید.



الف)



ب)

$\widehat{x} =$

$\widehat{y} =$



پ)

$\widehat{x} =$

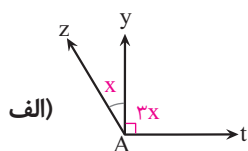
$\widehat{y} =$

۱۲. الف. یک پنج ضلعی مقعر رسم کنید.

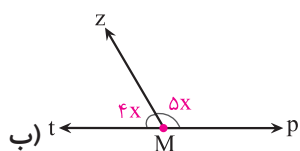
ب. یک هفت ضلعی محدب رسم کنید.

۲۰. مجموع زاویه های داخلی شکل مقابل چند درجه است؟

۱۳. در هر شکل اندازه زاویه یا مقدار خواسته شده را حساب کنید.



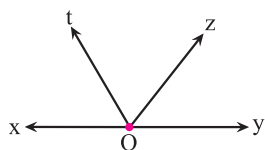
$$\widehat{yAz} =$$



$$\widehat{zMt} =$$

$$\widehat{mt} =$$

۱۴. Ot نیمساز زاویه $\widehat{xOz}$ است. اگر $\widehat{zOy} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\widehat{xOt}$ چند درجه است؟



۱۵. زاویه $\widehat{A} = 26^\circ$ است.

الف. متمم زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است؟

ب. مکمل زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است؟

۱۶. مجموع دو زاویه متقابل به رأس 120° است.

الف. اندازه هر یک چند درجه است؟

ب. مکمل هر کدام چند درجه است؟

۱۷. مجموع دو زاویه متقابل به رأس 82° است.

تبدیلات هندسی - شکل‌های مساوی

تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن، دوران)

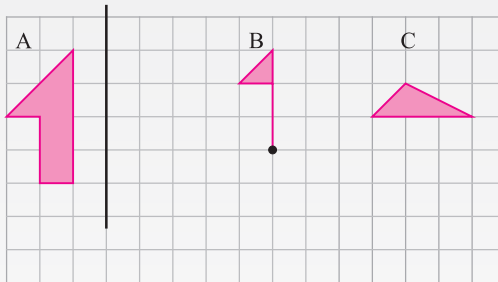
فعالیت: الف. قرینه شکل A را نسبت به خط داده شده رسم کنید.

ب. شکل B را به اندازه 180° حول نقطه O دوران داده و رسم کنید.

پ. شکل C را به دلخواه انتقال دهید و رسم کنید.

ت. آیا در هر قسمت اندازه شکل به دست آمده تغییر کرده است؟

ث. در کدام شکل‌ها جهت و وضعیت تغییر کرده است؟



با تبدیلات **انتقال، تقارن و دوران** (روی یک شکل، شکلی **هم‌نهشت** (مساوی) با آن به وجود می‌آید.

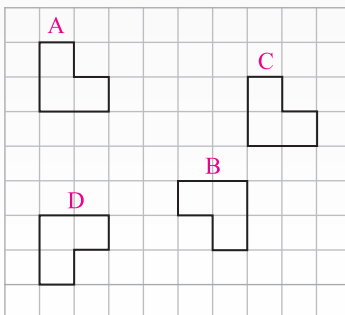
وقتی شکلی را (روی صفحه) انتقال می‌دهیم جهت و وضعیت آن **تغییر نمی‌کند** ولی با تقارن و دوران یک شکل، وضعیت و جهت **تغییر می‌کند**.

فعالیت: در صفحه مقابل:

الف. کدام شکل انتقال یافته شکل A می‌باشد؟

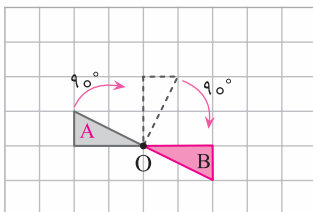
ب. کدام شکل دوران یافته شکل A است؟

پ. کدام شکل قرینه شکل A است؟



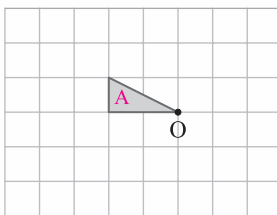
فعالیت: شکل A را حول نقطه O در جهت عقربه‌های ساعت به اندازه 180° دوران داده‌ایم. به نظر شما اگر دوران را خلاف

عقربه‌های ساعت انجام دهیم همان شکل B به وجود می‌آید؟



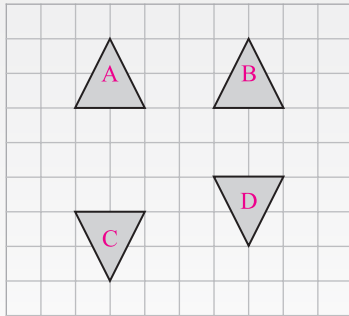
فعالیت: شکل زیر را یک بار 90° در جهت عقربه‌های ساعت و یک بار 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول نقطه O دوران

دهید.



در دوران 180° جهت دوران اهمیت ندارد.

شکل های مساوی یا هم نهشت

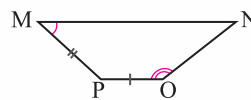
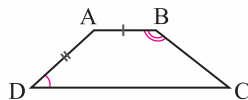


مثلث A را می توان با یک یا چند تبدیل (انتقال، دوران و تقارن) بر هر یک از شکل های B، C و D منطبق کرد. در این صورت می گوییم مثلث A با مثلث های B، C و D هم نهشت است و به این صورت می نویسیم:

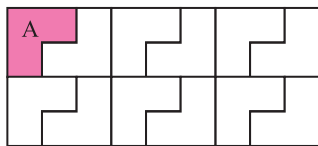
$$A \cong B \cong C \cong D$$


در دو شکل هم نهشت، زاویه های متناظر مساوی و ضلع های متناظر نیز با یک دیگر مساوی اند.

فعالیت: دو شکل زیر هم نهشت هستند، اجزای متناظر آن ها را بنویسید.



زاویه های متناظر: $\begin{cases} \hat{B} = \hat{Q} \\ \hat{A} = \hat{P} \end{cases}$ اضلاع متناظر: $\begin{cases} \overline{AD} = \overline{MP} \\ \overline{AB} = \overline{PQ} \end{cases}$

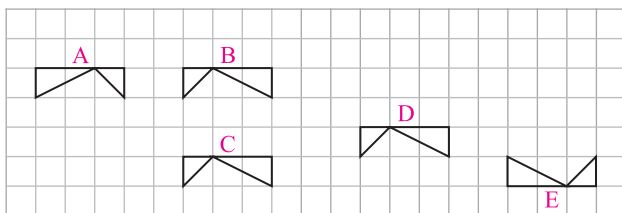


فعالیت: یک صفحه را با تبدیلات متوالی شکل A پوشانده ایم. ابتدا انتقال یافته های شکل A را با رنگ آبی مشخص کنید، سپس دوران یافته های هر یک از شکل های آبی را با رنگ قرمز مشخص کنید.

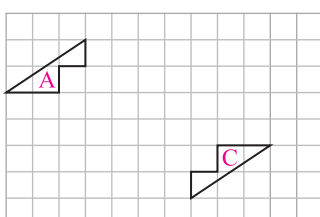
تعرین

تبدیلات هندسی

۱. هر شکل با یک تبدیل، به شکل بعدی تبدیل شده است. نوع تبدیل انجام شده (انتقال، تقارن یا دوران) را بنویسید.



$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$

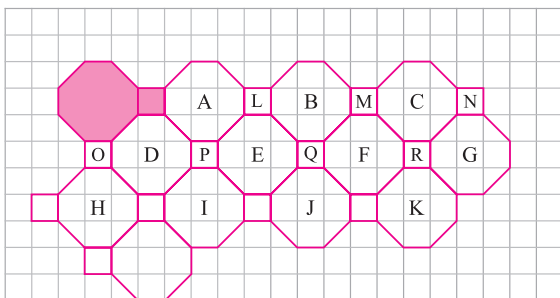


۲. شکل B را در صفحه مقابل طوری رسم کنید که بتوان با دو تبدیل متوالی شکل A را بر C منطبق کرد. روی هر فلش نوع تبدیل انجام شده را بنویسید.

$A \longrightarrow B \longrightarrow C$



۳. با انجام تبدیلات متوالی روی یک هشت ضلعی و مربع قسمتی از صفحه را کاشی کاری کرده ایم.

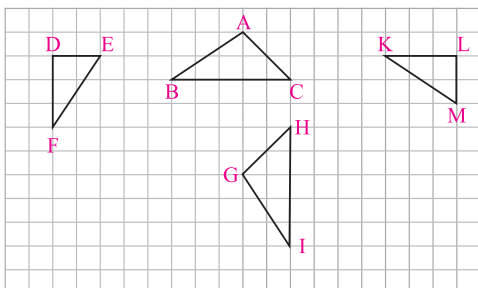


الف. به چند طریق می توان تنها با یک تبدیل مربع رنگی را به N تبدیل کرد؟

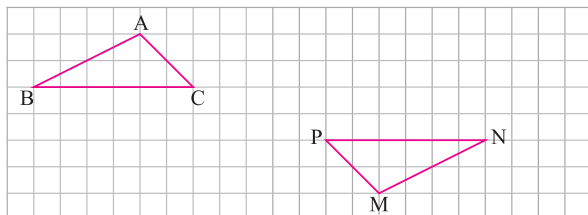
ب. به چند طریق می توان تنها با یک تبدیل هشت ضلعی رنگی را به H تبدیل کرد؟

شکل های هم نهشت

۴. مثلث های هم نهشت را در شکل پیدا کنید و با علائم ریاضی بنویسید.



۵. در شکل زیر دو مثلث ABC و MNP هم نهشت هستند. الف. ضلع ها و زاویه های مساوی دو شکل را با علامت گذاری مشخص کنید. ب. تساوی اجزای متناظر این دو مثلث را بنویسید.



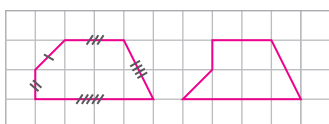
$$\begin{array}{ll} \hat{A} = & \overline{AB} = \\ \hat{B} = & \overline{AC} = \\ \hat{C} = & \overline{BC} = \end{array}$$

پ. این دو مثلث با چه تبدیلی هم نهشت می شوند؟

۶. در شکل مقابل دو تا پنج ضلعی داده شده دارای ضلع های دو به دو مساوی هستند.

الف. با علامت گذاری مناسب تساوی ضلع ها را نشان دهید.

ب. آیا این دو پنج ضلعی هم نهشت هستند؟ چرا؟



هندسه و استدلال و کاربردهای آن

• با توجه به تبدیلات هندسی شکل A، شکل زیر را ساخته ایم.

الف. شکل زیر را با استفاده از تبدیلات شکل A کامل کنید.

ب. رابطه هم نهشتی را با توجه به نوع تبدیلات بنویسید.

