۵. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x & , \quad x\geq 1\\ x^2 & , \quad -1<x<1\\ 2+x & , \quad x\leq -1\end{cases}$ را رسم کرده و با استفاده از آن، حاصل هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to +1} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$

۶. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin \mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ مفروض است. حاصل عبارت زیر را در صورت وجود برای تابع f محاسبه کنید.

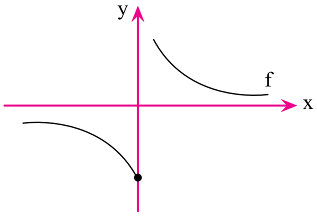
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=$$

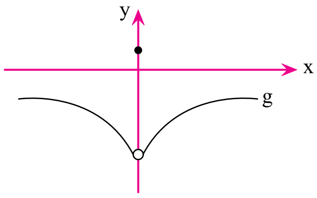
۷. نمودار تابعی را رسم کنید که در $x=3$ حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.

۸. نمودار تابعی را رسم کنید که حد چپ نداشته باشد ولی حد راست داشته باشد.

۹. آیا حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ وقتی $x\to(-1)^+$ وجود دارد؟ چرا؟

۱۰. کدام‌یک از توابع f و g که نمودارشان در زیر رسم شده است، در نقطهٔ $x=0$ حد ندارند؟





درس دوم: محاسبهٔ حد توابع

تاکنون برای محاسبهٔ حد توابع، از جدول مقادیر x و y یا رسم نمودار آن‌ها استفاده کردیم. امّا از این به بعد می‌خواهیم با پذیرفتن قوانین محاسبهٔ حد توابع، این عملیّات را ساده‌تر انجام دهیم.

قوانین محاسبهٔ حد توابع

حد تابع ثابت: حد تابع‌های ثابت به صورت $f(x)=k,(k\in\mathbb{R})$ برابر با همان مقدار ثابت است. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} k=k$

مثال:

حد تابع $f(x)=\pi$ وقتی $x\to 3$، چقدر است؟

پاسخ: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(\pi)=\pi$

حد تابع همانی: حد تابع همانی به صورت کلی $f(x)=x$ در هر نقطه‌ای برابر با همان نقطه است. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x)=a$

حد مجموع و تفاضل دو تابع: اگر دو تابع f و g هر دو در نقطه‌ای مانند a حد معیّن داشته باشند، آن‌گاه حد مجموع یا تفاضل آن دو نیز در a موجود است و با مجموع یا تفاضل حدهایشان برابر است. یعنی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$$

حد حاصل‌ضرب دو تابع: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a دارای حد معیّن باشند، آنگاه حد حاصل‌ضرب این دو تابع در a موجود و با حاصل‌ضرب حدهایشان برابر است. یعنی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\times g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)=L_1\times L_2$$

حد ضریب ثابت: می‌توان ضریب ثابت $(c\in\mathbb{R})$ را به قبل از نماد محاسبهٔ حد $(\lim)$ منتقل کرد و در آخر آن را در جواب حد، تأثیر داد (ضرب کرد). یعنی اگر حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to a$ برابر با L_1 باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cL_1$$

مثال:

حد تابع $f(x)=2x+3$ را وقتی $x\to 5$ محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}(2x+3)=\lim_{x\to 5} 2x+\lim_{x\to 5}(3)=2\lim_{x\to 5} x+\lim_{x\to 5} 3=2\times 5+3=13$$

تعمیم حد حاصل‌ضرب: فرض کنید می‌خواهیم حد تابعی مانند f (وقتی $x\to a$) را که در آن متغیّر x دارای توانی بیشتر از یک است، حساب کنیم؛ مانند $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=x^3$ و... . در واقع طبق حد حاصل‌ضرب توابع می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^3=\lim_{x\to 2} x\times\lim_{x\to 2} x\times\lim_{x\to 2} x=2\times 2\times 2=8$$

به منظور سهولت در عملیّات می‌توانیم از قانون تعمیم حد حاصل‌ضرب برای متغیّرهای توان‌دار استفاده کنیم، یعنی اگر $\lim f(x)$ وقتی $x\to a$ برابر با L باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=L^n$$

حد توابع چند جمله‌ای: قبلاً با چند جمله‌ای‌ها آشنا شدیم. شکل کلی یک چند جمله‌ای به صورت زیر است:

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

که در آن $a_n,\dots,a_2,a_1,a_0$ اعدادی حقیقی‌اند و توان‌های متغیّرها، اعدادی حسابی‌اند. یعنی n عضو مجموعهٔ $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$ می‌باشد. حال نکته‌ای را بیان می‌کنیم که محاسبهٔ حد توابع چند جمله‌ای (و سایر توابع) را آسان می‌کند.

نکته: حد یک تابع چند جمله‌ای در نقطه‌ای مانند a با مقدار تابع در a برابر است، یعنی:

$$\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$$

مثال:

حد تابع $f(x)=5x^2+3x-11$ را وقتی $x\to 1$، الف. با استفاده از قوانین محاسبهٔ حد و مرحله به مرحله ب. با استفاده از قضیه حد چندجمله‌ای‌ها محاسبه کنید.

پاسخ: الف.

$$\lim_{x\to 1} 5x^2+3x-11=\lim_{x\to 1} 5x^2+\lim_{x\to 1} 3x-\lim_{x\to 1} 11 \quad (\text{طبق قانون مجموع و تفاضل حدها})$$

$$=5\lim_{x\to 1} x^2+3\lim_{x\to 1} x-\lim_{x\to 1} 11 \quad (\text{طبق قانون حد ضریب ثابت})$$

$$=5(1)^2+3(1)-11 \quad (\text{طبق قانون حد تابع همانی و حد تابع ثابت و حد حاصلضرب})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=5+3-11=-3$$

ب.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} 5x^2+3x-11=5(1)+3(1)-11=-3$$

فصل ۶: حد و پیوستگی

محاسبهٔ حد توابع گویا

از تقسیم دو تابع چند جمله‌ای بر یکدیگر توابع گویا، پدید می‌آیند، یعنی: $Q(x)=\frac{P_۱(x)}{P_۲(x)}$

برای محاسبهٔ حد توابع گویا، نیازمندیم که قانون دیگری را به قوانین محاسبهٔ حد توابع به صورت زیر اضافه کنیم:

قانون تقسیم حدها: اگر حد دو تابع f و g وقتی $x\to a$، به ترتیب برابر با $L_۱$ و $L_۲$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}\qquad (L_۲\neq ۰)$$

(واضح است حد تابعی که در مخرج قرار می‌گیرد نباید صفر باشد، زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است.)

مثال: اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=x+۵$ باشند، حد توابع گویای $\frac{f(x)}{g(x)},\frac{g(x)}{f(x)}$ را وقتی $x\to ۱$، محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳}{x+۵}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۳)}{\lim\limits_{x\to ۱}(x+۵)}=\frac{۲(۱)-۳}{۱+۵}=-\frac{۱}{۶}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x+۵)}{\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۳)}=\frac{۱+۵}{۲(۱)-۳}=-۶$$

محاسبهٔ حد توابع گویا وقتی حد صورت و مخرج هر دو صفر شوند (حالت حدی $\frac{۰}{۰}$)

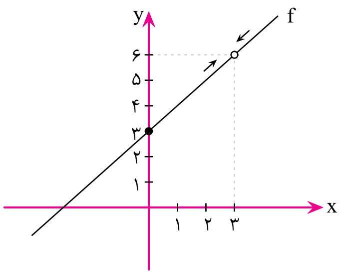
برای فهم بهتر مطلب ابتدا بهتر است حد دو تابع $f(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ و $g(x)=x+۳$ را وقتی $x\to ۳$ از دو روش جبری و نموداری بدست آوریم:

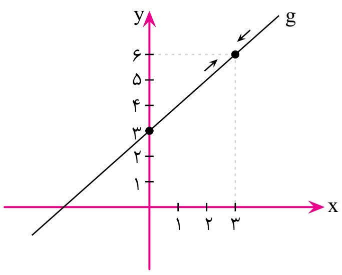
$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۹)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x-۳)}=\frac{۳^۲-۹}{۳-۳}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۳+۳=۶$$

$$\lim_{x\to ۳}g(x)=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۳+۳=۶$$

همانطور که دیده می‌شود با آنکه دو تابع f و g مساوی نیستند (چرا؟)، امّا در $x=۳$ دارای حدهای مساوی هستند. حال به بررسی حد این دو تابع در نقطهٔ $x=۳$ از روی نمودارشان توجّه کنید:





همانطور که می‌بینید تفاوت نمودارهای دو تابع f و g در آن است که $x=۳$ جزء دامنهٔ تابع f نیست. پس در نقطهٔ $x=۳$ نمودار f را توخالی رسم کرده‌ایم، امّا این نقطه در نمودار g (نقطهٔ $(۳,۶)$) وجود دارد و آن را توپُر در نظر گرفته‌ایم. همانطور که قبلاً گفتیم، حد تابع در a هیچ ربطی به مقدار تابع در a ندارد و هر دو تابع در $x=۳$ دارای حدی برابر با ۶ هستند.

روش‌های محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

۱. حذف عامل صفر شونده به کمک اتحادهای جبری یا تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

از قبل می‌دانیم وقتی $x=a$، عبارت $p(x)$ را صفر کند، یعنی $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $p(x)=0$ باشد، حتماً باید در تجزیهٔ عبارت $p(x)$ به عوامل اوّل جبری، عامل یا فاکتور $x-a$ وجود داشته باشد. حال این مطلب برای تابع گویای $Q(x)=\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ نیز صادق است. یعنی وقتی $x \to a$ و حد تابع $Q(x)$ به صورت $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، حتماً هر دو چند جمله‌ای $p_1(x)$ و $p_2(x)$ باید دارای عامل $(x-a)$ باشند. پس باید به کمک اتحادها، فاکتورگیری و یا با تقسیم p_1 و p_2 بر عامل $(x-a)$، p_1 و p_2 را تجزیه کرده و عامل صفر شونده را حذف کنیم و سپس به کمک قضایای موجود به محاسبه حد بپردازیم.

مثال:

حاصل حدهای زیر را (در صورت وجود) بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{4^2-4(4)}{4^2-16}=\frac{16-16}{16-16}=\frac{0}{0}$

همانطور که دیده می‌شود $x=4$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر است، لذا باید عامل $x-4$ را از صورت و مخرج حذف کنیم، سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$ (عامل $x-4$ را با فاکتورگیری حذف کردیم)

ب) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=12$$ (عامل $x-2$ را با تجزیه حذف کردیم)

پ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}$

می‌توانیم از اتحادجمله مشترک برای نمایان کردن عامل $(x-1)$ در مخرج استفاده کنیم، امّا در صورت کسر استفاده از اتحادهای جبری آسان نیست. پس بهتر است از تقسیم کمک بگیریم.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \underline{-x^3+x^2} & \overline{x^2+x-2} \\ x^2-3x+2 & \\ \underline{-x^2+x} & \\ -2x+2 & \\ \underline{+2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-1)}(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-3}=\frac{0}{-2}=0$$

۲. استفاده از تکنیک ضرب در مزدوج (گویا کردن) در حدهای رادیکالی

گاهی اوقات، در حالت حدی $\frac{0}{0}$ با توابع رادیکالی سروکار پیدا می‌کنیم. در این حالت برای نمایان کردن عامل صفر شونده باید از اتحاد مزدوج (یا اتحادهای مناسب دیگر) استفاده کنیم تا رادیکال از بین برود. به مثال صفحه بعد توجّه کنید.