

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

اتحاد

هرگاه دو عبارت جبری، به ازای مقادیر مختلف برای متغیرهایشان، حاصل یکسانی داشته باشند، می‌گوییم این دو عبارت متحد هستند و تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامیم. مهم‌ترین اتحادهایی که قبلاً آموخته‌اید عبارت‌اند از:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: مربع تفاضل دو جمله
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: مربع مجموع دو جمله
 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$: یک جمله مشترک
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: مزدوج
 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$: مربع سه جمله‌ای

مثال:

۱. حاصل هر یک از عبارتهای داده‌شده را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(2x + \frac{1}{2})^2$ ب) $(2a - 3b)^2$ پ) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2$
 ت) $(4a - \sqrt{3})(4a + \sqrt{3})$ ث) $(x - 7)(x + 3)$ ج) $(a + 2b - c)^2$

پاسخ:

الف) $(2x + \frac{1}{2})^2 = \frac{\text{مربع مجموع دو جمله}}{=} (2x)^2 + 2(2x)(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$
 ب) $(2a - 3b)^2 = \frac{\text{مربع تفاضل دو جمله}}{=} (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$
 پ) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = (x^2 + 2(x)(2) + 2^2) - ((x)^2 - 2(x)(1) + 1^2) = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1)$
 $= x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 6x + 3$
 ت) $(4a - \sqrt{3})(4a + \sqrt{3}) = \frac{\text{مزدوج}}{=} (4a)^2 - (\sqrt{3})^2 = 16a^2 - 3$
 ث) $(x - 7)(x + 3) = \frac{\text{جمله مشترک}}{=} x^2 + (-7 + 3)x + (-7 \times 3) = x^2 - 4x - 21$
 ج) $(a + 2b - c)^2 = \frac{\text{مربع سه جمله‌ای}}{=} a^2 + (2b)^2 + (-c)^2 + 2(a)(2b) + 2(a)(-c) + 2(2b)(-c)$
 $= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 2ac - 4bc$

۲. با استفاده از اتحادها تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(ax + 3)^2 = \dots + 6ax + \dots$ ب) $(x^2 - yz)^2 = \dots + y^2z^2$
 پ) $(x + \dots)(x - \dots) = x^2 - \frac{1}{4}$ ت) $(\sqrt{5} + \dots)(\sqrt{5} - \dots) = \dots - 4 = \dots = 1$
 ث) $(2x + 3)(2x - 5) = \dots - 4x + \dots = \dots$

پاسخ:

الف) $(ax + 3)^2 = \frac{\text{مربع مجموع دو جمله}}{=} a^2x^2 + 6ax + 9$ ب) $(x^2 - yz)^2 = \frac{\text{مربع تفاضل دو جمله}}{=} x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$
 پ) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{\text{مزدوج}}{=} x^2 - \frac{1}{4}$ ت) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = \frac{\text{مزدوج}}{=} (\sqrt{5})^2 - 4 = 5 - 4 = 1$
 ث) $(2x + 3)(2x - 5) = \frac{\text{جمله مشترک}}{=} (2x)^2 - 4x + (3 \times (-5)) = 4x^2 - 4x - 15$



مثال:

۳. حاصل هر یک از موارد زیر را به کمک اتحادها بیابید.

الف) $(۳۹۹)^۲$ ب) ۹۹۸×۱۰۰۲ پ) $(۱۰۰۲)^۲$

پاسخ:

الف) $(۳۹۹)^۲ = (۴۰۰ - ۱)^۲$ مربع تفاضل دو جمله $= (۴۰۰)^۲ - ۲(۴۰۰)(۱) + ۱^۲ = ۱۶۰۰۰۰ - ۸۰۰ + ۱ = ۱۵۹۲۰۱$

ب) $۹۹۸ \times ۱۰۰۲ = (۱۰۰۰ - ۲)(۱۰۰۰ + ۲)$ مزدوج $= (۱۰۰۰)^۲ - ۲^۲ = ۱۰۰۰۰۰۰ - ۴ = ۹۹۹۹۹۶$

پ) $(۱۰۰۲)^۲ = (۱۰۰۰ + ۲)^۲$ مربع مجموع دو جمله $= (۱۰۰۰)^۲ + ۲(۱۰۰۰)(۲) + ۲^۲ = ۱۰۰۰۰۰۰ + ۴۰۰۰ + ۴ = ۱۰۰۴۰۰۴$

تجزیه

هرگاه بتوان یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند چندجمله‌ای دیگر نوشت، می‌گوییم آن چندجمله‌ای تجزیه شده است.

مثال:

به کمک اتحادها عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

الف) $\frac{x^۲}{۴} - \frac{۱}{۲۵}$ ب) $۲ - a^۲$ پ) $x^۲ + ۲x - ۸$

ت) $۱۲a^۲ + ۳۶ab + ۲۷b^۲$ ث) $x^۲ + ۲\sqrt{۳}x + ۳$

پاسخ:

الف) $\frac{x^۲}{۴} - \frac{۱}{۲۵} = \left(\frac{x}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۵}\right)^۲$ مزدوج $= \left(\frac{x}{۲} - \frac{۱}{۵}\right)\left(\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۵}\right)$

ب) $۲ - a^۲ = (\sqrt{۲})^۲ - a^۲$ مزدوج $= (\sqrt{۲} - a)(\sqrt{۲} + a)$

پ) $x^۲ + ۲x - ۸$ جمله مشترک $= (x - ۲)(x + ۴)$

ت) $۱۲a^۲ + ۳۶ab + ۲۷b^۲ = ۳(۴a^۲ + ۱۲ab + ۹b^۲) = ۳((۲a)^۲ + ۲(۲a)(۳b) + (۳b)^۲)$ مربع مجموع دو جمله $= ۳(۲a + ۳b)^۲$

ث) $x^۲ + ۲\sqrt{۳}x + ۳ = x^۲ + ۲\sqrt{۳}x + (\sqrt{۳})^۲$ مربع مجموع دو جمله $= (x + \sqrt{۳})^۲$

تمرین‌های امتحانی

۱. با استفاده از اتحادها حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $(2a - 2)^2$ ب) $(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b)^2$ پ) $(a - b + 3)^2$
 ت) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)$ ث) $(a^2 + a)(a^2 - a)(a^4 + a^2)$ ج) $(2x^2 - 3)(2x^2 + 5)$

۲. با استفاده از اتحادها جاهای خالی را پر کنید.

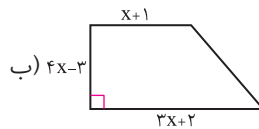
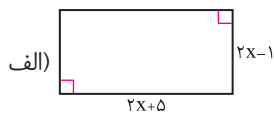
الف) $(4x + \dots)^2 = \dots + 4xy + \dots$ ب) $(\dots + \dots)(4x^2 - 2y^3) = 16x^4 - 4y^6$
 پ) $(3x + 5)(3x - 2) = \dots + \dots + 5 \times (-2) = \dots$ ت) $(ab + x)(ab - x) = \dots - \dots$

۳. حاصل هریک از عبارتهای داده‌شده را به کمک اتحادها بیابید.

الف) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 8)$ ب) $(2^5 - 5)(2^5 + 3)$
 پ) $(105)^2$ ت) 201×199

۴. در محاسبه حاصل هر یک از اتحادهای داده شده اشتباهی رخ داده است. آن اشتباه را پیدا کنید و پاسخ درست را بنویسید.

الف) $(2x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 9$ ب) $(a - 4)^2 = a^2 - 4^2$ پ) $(2x + 3)(2x - 1) = 4x^2 + 2x - 3$



۵. مساحت هریک از شکل‌های زیر را حساب کنید.

۶. هریک از عبارتهای زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید.

الف) $a^2 - x^2$ ب) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ پ) $16x^2 - 36y^2$ ت) $x^2 - 7x + 12$
 ث) $x^4 - y^4$ ج) $9x^2 - 15x + 6$ چ) $x^4 - 2x^2 + 1$ ح) $x^4 + x^2 - 2$

۷. تفاضل دو عدد ۴ و حاصل ضرب آنها ۱۴ است. مجموع آن دو عدد چقدر است؟

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱

الف) $(2a - 2)^2 \xrightarrow{\text{مربع تفاضل دو جمله}} (2a)^2 - 2(2a)(2) + 2^2 = 4a^2 - 8a + 4$

ب) $(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b)^2 \xrightarrow{\text{مربع مجموع دو جمله}} (\sqrt{2}a)^2 + 2(\sqrt{2}a)(\sqrt{3}b) + (\sqrt{3}b)^2 = 2a^2 + 2\sqrt{6}ab + 3b^2$

پ) $(a - b + 3)^2 \xrightarrow{\text{مربع سه جمله‌ای}} a^2 + (-b)^2 + 3^2 + 2a(-b) + 2a(3) + 2(-b)(3) = a^2 + b^2 + 9 - 2ab + 6a - 6b$

ت) $\underbrace{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2 + 5) = (x^2 - (\sqrt{5})^2)(x^2 + 5) = (x^2 - 5)(x^2 + 5) \xrightarrow{\text{مزدوج}} x^4 - 25$

د) $(a^f + a)(a^f - a)(a^f + a^f) = ((a^f)^2 - a^2)(a^f + a^f) = (a^f - a^2)(a^f + a^f) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (a^f)^2 - (a^2)^f = a^f - a^f$
 اتحاد مزدوج

ج) $(2x^2 - 3)(2x^2 + 5) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (2x^2)^2 + (\cancel{-3+5}) (2x^2) + (-3 \times 5) = 4x^4 + 4x^2 - 15$

الف) $(4x + \frac{1}{4}y)^2 \xrightarrow{\text{مربع مجموع دو جمله}} 16x^2 + 4xy + \frac{1}{16}y^2$ ب) $(4x^2 + 2y^3)(4x^2 - 2y^3) = 16x^4 - 4y^6$ ۲

پ) $(3x + 5)(3x - 2) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (3x)^2 + (\cancel{5-2})(3x) + 5 \times (-2) = 9x^2 + 9x - 10$

د) $(ab + x)(ab - x) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (ab)^2 - x^2 = a^2b^2 - x^2$

الف) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 8) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\sqrt{2})^2 + (-3 + 8) \times \sqrt{2} + (-3 \times 8) = 2 + 5\sqrt{2} - 24 = -22 + 5\sqrt{2}$ ۳

ب) $(2^5 - 5)(2^5 + 3) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (2^5)^2 + (-5 + 3) \times 2^5 + (-5 \times 3) = 2^{10} - 2 \times 2^5 - 15 = 2^{10} - 2^6 - 15 = 1024 - 64 - 15 = 945$

پ) $(1005)^2 = (1000 + 5)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(5) + 5^2 = 1000000 + 10000 + 25 = 1010025$

د) $201 \times 199 = (200 + 1)(200 - 1) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (200)^2 - 1^2 = 40000 - 1 = 39999$

الف. $2x^2$ اشتباه است. شکل درست اتحاد به صورت روبه‌رو است: $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ ۴

ب. 4^2 اشتباه است و همچنین جمله $(f)(a) - 2(a)$ نوشته نشده است، پس داریم:

$(a - 4)^2 = a^2 - 2(a)(4) + 4^2 = a^2 - 8a + 16$

پ. $2x$ اشتباه است. شکل درست اتحاد عبارت است از: $(2x + 3)(2x - 1) = 4x^2 + (\cancel{3-1})(2x) - 3 = 4x^2 + 4x - 3$

الف) $(2x + 5)(2x - 1) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (2x)^2 + (\cancel{5-1})(2x) + (5 \times (-1)) = 4x^2 + 8x - 5$ ۵

ب) ارتفاع \times (مجموع دو قاعده) $\times \frac{1}{2} =$ مساحت دوزنقه

مساحت دوزنقه $= \frac{1}{2}(x + 1 + 3x + 2) \times (4x - 3) = \frac{1}{2} \underbrace{(4x + 3)(4x - 3)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{1}{2}((4x)^2 - 3^2) = \frac{1}{2} \times (16x^2 - 9)$

الف) $a^2 - x^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (a - x)(a + x)$ ۶

ب) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 \xrightarrow{\text{مربع مجموع دو جمله}} (x + \sqrt{2})^2$

پ) $16x^2 - 36y^2 = (4x)^2 - (6y)^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (4x - 6y)(4x + 6y)$

د) $x^2 - 7x + 12 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x - 3)(x - 4)$

ث) $x^f - y^f \xrightarrow{\text{مزدوج}} \underbrace{(x^f - y^f)}_{\text{مزدوج}} (x^f + y^f) = (x - y)(x + y)(x^f + y^f)$

$$\text{ج) } 9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 5(3x) + 6 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (3x - 2)(3x - 3) = (3x - 2) \times 3 \times (x - 1)$$

$$\text{ج) } x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x^2 - 1)(x^2 - 1) \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)^2$$

$$\text{ح) } x^4 + x^2 - 2 = (x^2)^2 + x^2 - 2 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{مزدوج}}(x^2 + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)$$

۷ تفاضل دو عدد را به صورت $a - b$ و حاصل ضرب آن‌ها را به صورت ab نشان می‌دهیم، پس داریم:

$$a - b = 4, \quad ab = 14, \quad a + b = ?$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 4^2 = a^2 - 2(14) + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 28 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 44$$

به کمک اتحادها داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2(ab) + b^2 = 44 + 2(14) = 44 + 28 = 72$$

و باز هم با کمک اتحادها می‌توانیم بنویسیم:

$$\Rightarrow (a + b)^2 = 72 \Rightarrow \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{72} \Rightarrow |a + b| = \sqrt{72} \Rightarrow a + b = \pm \sqrt{36 \times 2} = \pm 6\sqrt{2}$$