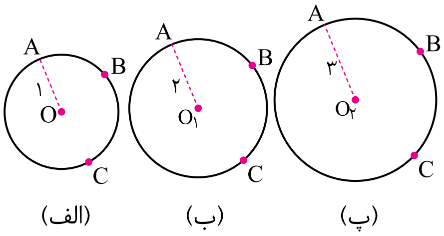
درس اول: ترسیم‌های هندسی

قبل از شروع درس، شکل شناخته‌شدهٔ دایره را بررسی می‌کنیم. به دایره‌های زیر توجه کنید:



۳ دایره به شعاع متفاوت می‌بینیم.

در شکل (الف) فاصله نقطه A تا مرکز دایره برابر ۱ واحد است (شعاع ۱ واحد است)

مسلماً در این شکل اگر روی نقطه B هم قرار گیریم و به مرکز وصل کنیم باز هم فاصله از مرکز (شعاع) همان خواهد بود، این روند در مورد نقطه C هم صادق است.

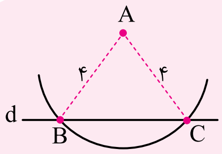
نکته: هر نقطه روی دایره از مرکز آن دایره به یک فاصله است، پس اگر نوک پرگار را روی مرکز قرار دهیم و دهانهٔ آن را به اندازهٔ ۱ واحد باز کنیم و اقدام به زدن کمان نماییم، محل قرار گرفتن نقاط $A, B, C, ...$ به دست می‌آید.

شکل ب و پ هم همین حالت را دارند، شکل ب دایره‌ای به مرکز O_1 و کمانی به شعاع ۲ واحد و شکل ج دایره‌ای به مرکز O_2 و کمانی به شعاع ۳ واحد.

از این مفهوم در حل مثال زیر استفاده می‌کنیم.

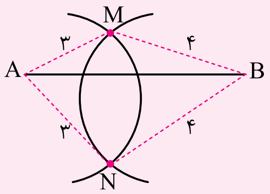
مثال:

۱. نقطه A مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۳ واحد از خط d قرار دارد. نقاطی را بیابید که به فاصلهٔ ۴ واحد از نقطه A روی خط d واقع باشند.



پاسخ: یاد دایره می‌افتیم، یعنی نوک پرگار را روی A قرار داده و دهانه پرگار را به اندازهٔ ۴ واحد باز کرده و کمانی می‌زنیم. نقاط تقاطع این کمان و خط d جواب مورد نظر خواهند بود.

۲. نقاط A و B را مانند شکل مقابل، به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کرده و از نقطهٔ A یک کمان می‌زنیم. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کرده و از نقطهٔ B یک کمان می‌زنیم. اگر نقاط تقاطع را M و N در نظر بگیریم کاملاً مشخص است که M و N از A و B به ترتیب دارای فاصله‌های ۳ و ۴ هستند و ۲ مثلث AMB و ANB بنا به حالت ۳ ضلع با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

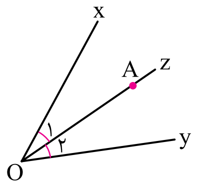


توجه داریم که طبق روش بالا توانستیم به راحتی مثلثی با ابعاد ۵ و ۴ و ۳ را رسم کنیم.

نیمساز:

نیمساز، زاویه را نصف می‌کند. توجه کنید.

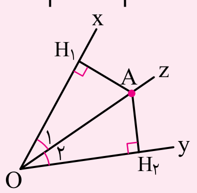
نیمساز $Oz \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$



مثال:

۱. در شکل بالا نشان دهید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه $x\hat{O}y$ به یک فاصله است.

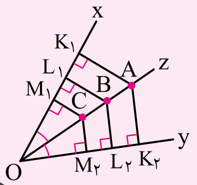
پاسخ: هر وقت صحبت از فاصله شد، یعنی از نقطه مورد نظر عمودی خارج می‌کنیم پس در این سؤال دنبال این هستیم که نشان دهیم $AH_1 = AH_2$



دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAH_1}$ و $\overset{\Delta}{OAH_2}$ به حالت برابری وتر و یک زاویه حاده هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} OA \text{ مشترک} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{OAH_1} \cong \overset{\Delta}{OAH_2} \to AH_1 = AH_2$$

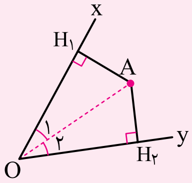
نتیجه: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



$$AK_1 = AK_2, BL_1 = BL_2, CM_1 = CM_2$$

مثال:

۲. حالا فرض کنید زاویه $x\hat{O}y$ را داریم و نقطه A درون آن به صورتی انتخاب شده است که فاصله آن از ۲ نیم‌خط Ox و Oy به یک اندازه است، نشان دهید A روی نیمساز xOy قرار دارد.



پاسخ: از A به O وصل کرده و از طرفی داریم $AH_1 = AH_2$. حال باید نشان دهیم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

$$\begin{cases} AH_1 = AH_2 \ (\text{فرض}) \\ \text{مشترک } OA \end{cases} \rightarrow \underset{(\text{وتر و یک ضلع})}{\overset{\Delta}{OAH_1} \cong \overset{\Delta}{OAH_2}} \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

نتیجه: اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز یک زاویه

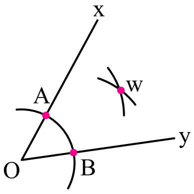
می‌خواهیم نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ را رسم کنیم، به مراحل زیر توجه کنید:

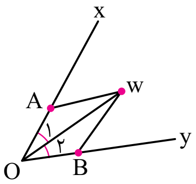
۱. به مرکز O کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند.

۲. حال به مرکز A و B و با دهانهٔ پرگار بیش از نصف طول AB، ۲ کمان زده و محل تلاقی آن‌ها را W می‌نامیم.

۳. از W به O وصل کرده و پاره‌خط OW نیمساز خواهد بود. حال این سؤال مطرح می‌شود که چرا OW نقش نیمساز را دارد؟

توجه کنید:

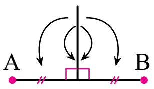




$$\begin{cases} OA = OB \\ AW = BW \\ \text{مشترک } OW \end{cases} \rightarrow \overset{\Delta}{OAW} \cong \overset{\Delta}{OBW} \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

عمودمنصف

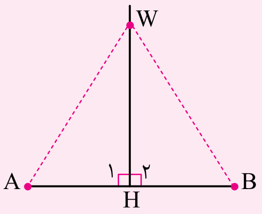
هر گاه صحبت از عمودمنصف می‌شود یاد دو لفظ می‌افتیم، عمود و منصف!! یعنی خطی که عمود است و نصف می‌کند، دقیقاً مانند شکل مقابل:



مثال:

۱. نشان دهید اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

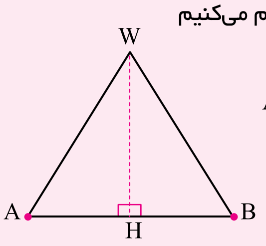
پاسخ: نقطه مورد نظر را W در نظر می‌گیریم، حال می‌خواهیم نشان دهیم $WA = WB$. اگر از W به A و B وصل کنیم، داریم:



$$\begin{cases} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \\ \text{مشترک } WH \end{cases} \rightarrow \overset{\Delta}{AHW} \underset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\Delta}{BHW} \rightarrow AW = BW$$

۲. عکس مثال بالا، نشان دهید اگر نقطه ای از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

پاسخ: دنبال این هستیم که نشان دهیم $AH = BH$ است پس از نقطه W عمود WH را بر AB رسم می‌کنیم



$$\begin{cases} AW = BW \\ \text{مشترک } WH \end{cases} \rightarrow \underset{\text{وتر و یک ضلع}}{\overset{\Delta}{AHW} \cong \overset{\Delta}{BHW}} \rightarrow AH = BH$$

حالا با ۲ مثال قبل ۲ نتیجه داریم:

الف. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از ۲ سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

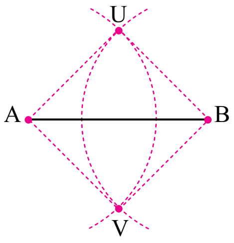
ب. هر نقطه‌ای که از ۲ سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد مسلماً روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

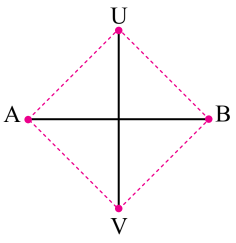
رسم عمودمنصف

می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. ابتدا دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک بار از نقطه A و بار دیگر از نقطه B کمان‌هایی می‌زنیم. محل تلاقی‌ها را U و V نامیده و با وصل‌کردن به یکدیگر، عمودمنصف به‌دست خواهد آمد.

اما چرا؟

به شکل مقابل توجه کنید.





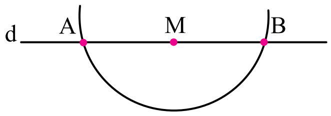
$$AU = BU = AV = BV$$

می‌بینیم U و V از ۲ سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند پس UV نقش عمودمنصف را خواهد داشت.

نکته: در لوزی و مربع قطرها بر یکدیگر عمود بوده و یکدیگر را نصف می‌کنند. از این رو با روش فوق می‌توانیم یک لوزی یا مربع رسم کنیم.

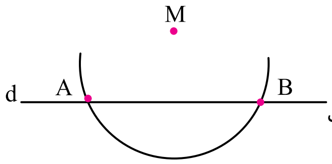
رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن

می‌خواهیم از نقطه M روی d، خطی عمود بر d رسم کنیم. ابتدا به مرکز M و به طول معینی به کمک پرگار کمانی رسم کرده و محل تلاقی آن کمان با خط d را نقاط A و B می‌نامیم. در پایان فقط کافیست عمودمنصف AB را رسم کنیم که توضیح داده شده است.



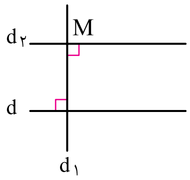
رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه خارج آن

می‌خواهیم از نقطه M خارج خط d، خطی عمود بر d رسم کنیم.



دهانه پرگار را بیش از فاصله M از خط d باز کرده و به مرکز M کمانی رسم می‌کنیم تا d را در نقاط A و B قطع کند، کاملاً مشخص است که عمودمنصف AB از M می‌گذرد و این عمودمنصف همان جواب مسئله خواهد بود.

رسم خط موازی از یک نقطه خارج خط

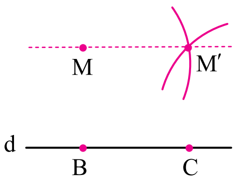


می‌خواهیم از نقطه M خارج خط d، خطی موازی با d رسم کنیم. از این رو به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. از نقطه M خطی عمود بر d رسم کرده و آن را d_1 می‌نامیم.

۲. از نقطه M روی خط d_1 خطی عمود بر d_1 رسم کرده و آن را d_2 می‌نامیم.

۳. کاملاً مشخص است که d_2 و d موازیند، زیرا می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط با یکدیگر موازیند.



به کمک روش دیگری هم می‌توان از یک نقطه خارج خط، خطی موازی خط مورد نظر رسم کرد. روش دیگر عبارت است از:

روی خط d دو نقطه B و C را در نظر گرفته و دهانه پرگار به اندازه BC باز کرده و به مرکز M یک کمان می‌زنیم.

در ادامه دهانهٔ پرگار را به اندازه MB باز کرده و به مرکز C یک کمان دیگر رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع این دو کمان را M' می‌نامیم.

خط MM' از M گذشته و با d موازی است. این روش را تحت عنوان روش متوازی الاضلاع می‌شناسیم.

تمرین‌های امتحانی

۱. مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

۲. مربعی رسم کنید که طول قطر آن داده شده باشد.

۳. مستطیلی رسم کنید که طول یک ضلع آن ۵ و طول قطر آن ۷ باشد.

۴. مستطیلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۳ سانتی‌متر باشد.

۵. لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۷ رسم کنید.

۶. لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۶ باشد.

۷. محل نقاطی را بیابید که از یک خط مفروض به فاصله معلوم L باشد.

۸. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو قطر آن ۴ و ۶ بوده و ارتفاع آن ۳ باشد.

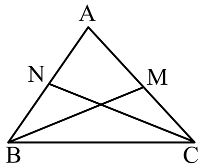
۹. طریقهٔ رسم زاویه 90° را توضیح دهید.

۱۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با داشتن وتر و ارتفاع وارد بر وتر رسم کنید.

۱۱. دایره‌ای رسم کنید که از ۳ نقطه A ، B و C بگذرد.

۱۲. از مثلث ABC، اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و میانهٔ $BM = m_b$ معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۱۳. با توجه به شکل زیر چند نقطه وجود دارد که از AB و AC به یک فاصله و همچنین از میانه‌های BM و CN نیز به یک فاصله باشد؟

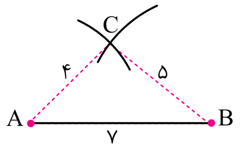


۱۴. مثلث ABC را با داشتن زاویه $\hat{A}$ و ۲ ارتفاع وارد بر اضلاع این زاویه رسم کنید.

۱۵. از مثلث ABC، ضلع $BC = a$ ، ارتفاع $AH = h_a$ و میانه $AM = m_a$ معلوم است، مثلث را رسم کنید.

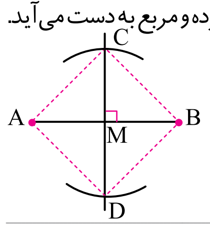
پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱ ابتدا پاره‌خطی به طول ۷ را رسم می‌کنیم و نقاط ابتدا و انتهای آن را A و B می‌نامیم. حال یک بار نوک پرگار را روی A گذاشته و کمانی به طول ۴ می‌زنیم، همین داستان را در مورد B اعمال کرده و کمانی به طول ۵ می‌زنیم.
نقاط تلاقی این ۲ کمان را C می‌نامیم، حال از C به A و B وصل کرده و مثلث به دست می‌آید.

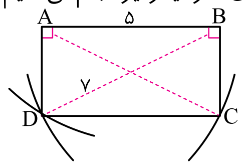


آیا می‌توانستیم طول پاره‌خط AB را ۵ بگیریم و همان مراحل قبل را تکرار کنیم؟
جواب: بله کاملاً درست است.

۲ فرض کنیم قطر مورد نظر AB باشد، پس ابتدا AB را کشیده و در ادامه عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد عمودمنصف با پاره‌خط AB را M می‌نامیم.
به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم تا عمودمنصف را در C و D قطع کند. در پایان از C و D به A و B وصل کرده و مربع به دست می‌آید.
(توجه کنید ۴ ضلعی ACBD مربع است زیرا قطرها با هم برابر بوده و یکدیگر را نصف می‌کنند.)



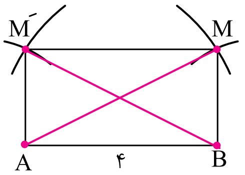
۳ پاره‌خط AB به طول ۵ را رسم می‌کنیم. در ادامه به مرکز B و به شعاع ۷ کمانی می‌زنیم.
هم‌چنین به مرکز A و به شعاع $\sqrt{7^2-5^2} \cong 4/9$ کمانی می‌زنیم تا قطر را در D قطع کند. همین کار را برای قطر دیگر نیز انجام می‌دهیم تا نقطه C به دست آید.
حال کافی است B را به C وصل کنیم.



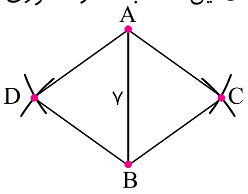
۴ ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس طول قطر مستطیل را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 \\ a = 4, b = 3 \end{array}\right\} \to c = 5$$

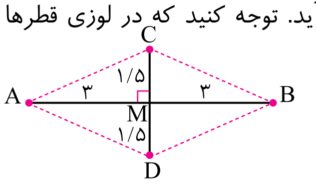
حال ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم سپس به مرکز A و به طول ۵ سانتی‌متر کمانی می‌زنیم. سپس دهانه پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کرده و از B کمانی می‌زنیم تا قطر مستطیل را در M قطع کند. مجدداً همین کارها را برای قطر دیگر مستطیل انجام می‌دهیم تا نقطه M' به دست آید و در نهایت از M به M' وصل می‌کنیم تا مستطیل به دست آید.



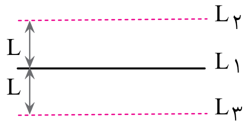
۵ ابتدا قطر AB را به طول ۷ می‌کشیم. به مرکز A و همچنین به مرکز B کمان‌هایی به شعاع ۵ می‌زنیم. محل تلاقی این کمان‌ها نقاط C و D را می‌دهند و با وصل کردن این نقاط به A و B لوزی به دست می‌آید.
توجه کنید که در لوزی، اضلاع با یکدیگر برابرند.



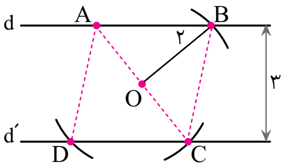
۶ ابتدا پاره‌خط AB به طول ۶ را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف آن را رسم کرده و محل تلاقی را M می‌نامیم. حال به مرکز M و به شعاع ۱/۵ کمان می‌زنیم تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. در پایان کافیست از C و D به A و B وصل کرده و جواب مسئله به دست می‌آید. توجه کنید که در لوزی قطرها عمودمنصف‌اند.



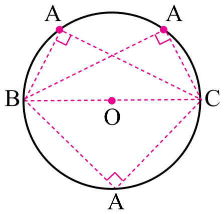
۷ مسلماً این نقاط روی دو خط موازی با خط مورد نظر و به فاصله معلوم L از آن‌ها قرار دارد.
از این رو طبق روش گفته‌شده در درس‌نامه کافی است از یک نقطه روی خط‌های L_3 و L_2 خطی موازی خط L_1 رسم کنیم.



۸ طبق مثال قبل ابتدا دو خط d و d' را موازی هم و به فاصله ۳ از یکدیگر رسم می‌کنیم. نقطه دلخواه A را روی d در نظر گرفته و حال به مرکز A و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم و محل برخورد کمان با d' را C می‌نامیم. نقطه O وسط AC محل برخورد قطرهاست (در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف‌اند)
حال به مرکز O و به شعاع ۲ کمانی رسم می‌کنیم تا d و d' را در B و D قطع کند. با وصل کردن نقاط A, B, C, D متوازی‌الاضلاع به‌دست‌می‌آید.

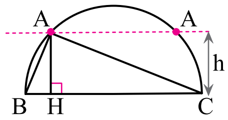


۹ به یاد داریم که در هر دایره، زاویهٔ مقابل به قطر $90°$ است. کافی است پاره‌خط دلخواهی به طول مشخص را در نظر بگیریم (BC) دهانهٔ پرگار را به اندازه نصف طول BC باز کرده و از نقطه وسط پاره‌خط BC (نقطه O) دایره‌ای می‌زنیم.
هر نقطه روی دایره هنگامی که به B و C وصل شود جواب خواهد بود.



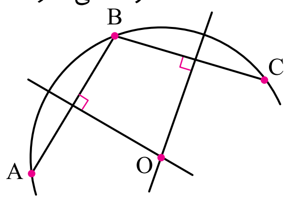
۱۰ ابتدا پاره‌خط به طول BC را می‌کشیم و دایره‌ای به قطر BC طبق توضیحات سؤال قبل را رسم می‌کنیم. در پایان کافی است خطی موازی با BC و به فاصله معلوم h را رسم کنیم و محل برخورد این خط با دایره، رأس A خواهد بود و به همین راحتی مثلث رسم می‌شود.

توجه: زاویهٔ $\widehat{A}$، ۹۰° است.

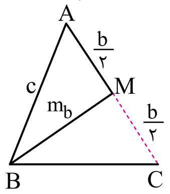


۱۱ می‌دانیم مرکز دایره از این ۳ نقطه به یک فاصله است پس مرکز روی عمودمنصف‌های AB و BC قرار دارد.

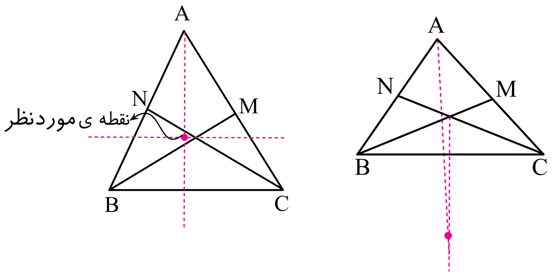
عمودمنصف‌های AB و BC را رسم کرده و محل برخوردشان را O می‌نامیم. حال کافیست به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم. دایره مورد نظر از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد.



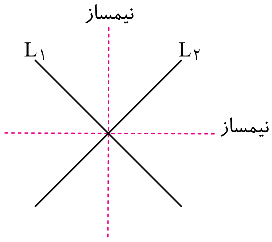
۱۲ فرض کنیم مثلث ABC جواب مسئله باشد و چون BM میانه است پس $AM = \frac{b}{۲}$. می‌بینیم مثلث ABM که طول هر ۳ ضلع آن را داریم طبق تمرین ۱ قابل رسم است، پس ABM را رسم کرده و در پایان ضلع AM را به اندازهٔ خودش از M امتداد می‌دهیم تا به نقطه C برسیم و از C به B وصل می‌کنیم و مثلث ساخته می‌شود.



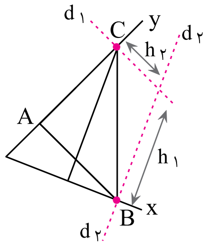
۱۳ مسلماً نقاطی که از AB و AC به یک فاصله باشند روی نیمساز زاویهٔ A و نقاطی که از BM و CN به یک فاصله باشند روی نیمسازهای زاویه‌های آن‌ها قرار دارد. پس جواب مورد نظر همان محل برخورد این نیمسازهاست.



توجه: اگر ۲ خط متقاطع باشند، دو جفت زاویهٔ متقابل به رأس می‌سازند که هرکدام دارای یک نیمساز است.



۱۴ ابتدا زاویهٔ $x\widehat{A}y$ را برابر با زاویهٔ $\widehat{A}$ رسم می‌کنیم. اگر اندازه ۲ ارتفاع را به ترتیب $h_۱$ و $h_۲$ در نظر بگیریم، کافیست خط $d_۱$ را موازی Ax و به فاصلهٔ $h_۱$ و خط $d_۲$ را موازی Ay و به فاصلهٔ $h_۲$ از آن رسم کنیم. محل برخورد $d_۱$ و $d_۲$ با Ay و Ax را C و B می‌نامیم.



۱۵ خط L را رسم کرده و از نقطه H روی آن خط عمودی به طول h_a رسم می‌کنیم و نقطهٔ انتهایی را A می‌نامیم. به مرکز A و به شعاع m_a کمانی می‌زنیم تا L را در نقطه M قطع کند. به مرکز M و به شعاع $\frac{a}{۲}$ کمانی می‌زنیم و محل تقاطع این کمان با خط L را B و C می‌نامیم. از B و C به A وصل کرده و جواب بدست می‌آید.