

درس دوم: متمم يك مجموعه

وقتی با مجموعه‌ها کار می‌کنیم، در هر مبحث مجموعه‌ای وجود دارد که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث ما، کاملاً درون آن مجموعه قرار دارند. این مجموعه را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامیم و با حرف U نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال وقتی مجموعه‌های مورد بحث، کلاس‌های مختلف مدرسه شما هستند، مجموعه مرجع می‌تواند کل مدرسه باشد. یا وقتی درباره اعداد صحبت می‌کنیم هر مجموعه بزرگ‌تری که شامل همهٔ اعضای مورد بحث باشد، می‌تواند مجموعه مرجع باشد.

مثال:

می‌خواهیم اعضای مجموعه $A = \{x \mid -2 \leq x < 2\}$ را بنویسیم. به حالت‌های زیر توجه کنید:

اگر $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$

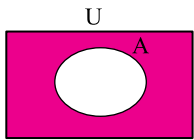
اگر $x \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \{1\}$

پاسخ:

اگر $x \in \mathbb{W} \Rightarrow A = \{0, 1\}$

اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد، اعضا را نمی‌توان نوشت زیرا بی‌شمار عدد بین -2 و 2 قرار دارد.

نکته: برای نوشتن اعضای مجموعه A باید دقت کنیم A زیر مجموعه کدام مجموعه مرجع است یا به عبارتی x عضو کدام مجموعه است.



متمم A : وقتی $A \subset U$ است همان‌طور که می‌دانید اعضای وجود دارند که در U هستند اما در A نیستند. به این

مجموعه که در شکل روبه‌رو رنگ زده‌ایم مجموعه متمم A می‌گوییم و با A' نمایش می‌دهیم.

پس A' شامل اعضای از U (مرجع) است که این اعضا در A قرار ندارند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} \Rightarrow A' = U - A$$

به عنوان مثال اگر U شامل تمام کتاب‌های درسی امسال شما باشد و A مجموعه کتاب‌های درسی عمومی شما باشد (مثل انگلیسی، دینی، عربی و...) در این صورت مجموعه A' ، بقیهٔ کتاب‌های درسی شما است، یعنی کتاب‌های تخصصی.

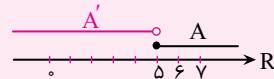
مثال:

می‌خواهیم متمم مجموعه‌های زیر را بنویسیم:

۱. U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده ایران باشد و A مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد، آن‌گاه

اتومبیل‌های با پلاک زوج $A' =$

$A = \{x \mid x \geq 5\}$, $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A' = \{x \mid x < 5\} = (-\infty, 5)$



۲.

۳. اگر U ، مجموعه اعداد طبیعی و B مجموعه اعداد زوج باشد آن‌گاه: $B' =$

۴. اگر U مجموعه اعداد حقیقی و Q مجموعه اعداد گویا باشد آن‌گاه: $Q' =$

سؤال: به نظر شما آیا می‌توان عضوی پیدا کرد که هم در A باشد هم در A' ؟

پاسخ: درست است، خیر، مجموعه‌های A و A' هیچ اشتراکی ندارند. ($A \cap A' = \emptyset$) از طرفی اگر اعضای A و A' را یکجا جمع‌آوری کنیم،

$A \cup A' = U$ مجموعه مرجع را خواهیم داشت. یعنی:

فکر می‌کنید \emptyset' و U' چه مجموعه‌هایی هستند؟

دقت کنید؛ ما می‌گوییم $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$ در نوشتن A' قسمت $x \in U$ ثابت است حال: $\emptyset = \{x \in U \mid x \notin \emptyset\}$

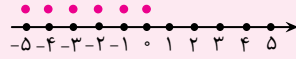
یعنی اعضای از U که در \emptyset نیستند و این یعنی خود U پس: $\emptyset' = U$

و اما $U' = \{x \in U \mid x \notin U\}$ ، یعنی تمام اعضای U را از U برداریم، خب چیزی نمی‌ماند. پس: $U' = \emptyset$

مثال:

می‌خواهیم یک بار با در نظر گرفتن Z به عنوان مجموعه مرجع و یک بار هم R به عنوان مجموعه مرجع، اعضای مجموعه N' را روی محور نمایش دهیم.

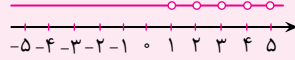
(۱) $N' = \{x \in Z \mid x \notin N\}$



پاسخ:

تمام نقاط روی محور، اعداد صحیح هستند و تمام نقاط بالای محور، عضو N' می‌باشند.

(۲) $N' = \{x \in R \mid x \notin N\}$



حال اگر R ، مجموعه مرجع باشد و بخواهیم Z' را نمایش دهیم، نمایش آن روی محور به شکل زیر است:



توجه: اگر A مجموعه متناهی باشد، A' مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

به عنوان مثال اگر N را مجموعه مرجع در نظر بگیریم و مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را به شکل $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تعریف کرده باشیم، خواهیم داشت:

$A' = \{6, 7, 8, \dots\} \Rightarrow A'$ نامتناهی است.

ولی اگر A را به شکل $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ در نظر بگیریم ولی مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ باشد، خواهیم داشت: $A' = \{6, 7, 8, 9\}$ یعنی متناهی است.

پس اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد و A مجموعه متناهی، آن‌گاه مجموعه A' نامتناهی است و اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد و A نامتناهی باشد آن‌گاه، A' ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

$N, A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \rightarrow A' = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ مجموعه مرجع $N, A = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow A' = \{6, 7, 8, 9\}$

و اما اگر مجموعه مرجع متناهی باشد هم A و هم A' مجموعه متناهی خواهند بود.

تعریف: دو مجموعه را جدا از هم می‌گوییم، هر گاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

$A = \{\text{ریاضی، تاریخ، عربی، دینی}\} \quad B = \{\text{فیزیک، زیست}\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ و B دو مجموعه جدا از هم هستند.

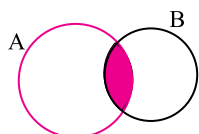
تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ و تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B را با $n(A \cup B)$ نشان می‌دهیم دقت کنید: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{-1, 2, 7, 5\}$ باشند، در این صورت $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. حال جدول زیر را کامل می‌کنیم.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A) + n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۵	۴	$5 + 4 = 9$	۷	۲

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ همان‌طور که می‌بینید:

درواقع: زیرا با توجه به شکل زیر، دایره سمت چپ اعضای A و دایره سمت راست اعضای B را نشان می‌دهد. اعضای قسمت هاشورخورده (یعنی اعضای $A \cap B$) یک بار جزء اعضای A و یک بار هم جزء اعضای B شمرده شده‌اند. یعنی در کل ۲ بار حساب شده‌اند؛ به همین دلیل حاصل $n(A) + n(B)$ از حاصل $n(A \cup B)$ بیشتر است. برای برقراری تعادل بین این دو باید یکی از آن دو مرتبه که اضافی شمرده‌ایم را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم، پس می‌شود:



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مثال:

مجموعه مقسوم علیه های عدد ۲۰ را A و مجموعه مقسوم علیه های عدد ۳۰ را B می نامیم. مشخص کنید چند عدد مقسوم علیه ۲۰ یا ۳۰ هستند؟
پاسخ: هدف به دست آوردن $n(A \cup B)$ می باشد.

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \rightarrow n(A) = 6 \quad B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \rightarrow n(B) = 8$$

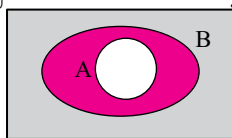
$$A \cap B = \{1, 2, 5, 10\} \rightarrow n(A \cap B) = 4 \quad n(A \cup B) = \frac{6+8}{14} - 4 = 10$$

نکته: تعداد اعضایی که فقط در A هستند: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$$n(A - B) = \frac{6}{n(A)} - \frac{4}{n(A \cap B)} = 2$$

در مثال بالا، تعداد اعدادی که فقط مقسوم علیه ۲۰ هستند برابر است با:

نکته: اگر $A \subset B$ و هر دوزیر مجموعه U باشند با سایه زدن A' و B' در شکل روبه رو متوجه می شویم $B' \subset A'$.



مثال:

اگر مجموعه مرجع $U = \{a, b, c, d, e\}$ ، $C' = \{a, c\}$ ، $B = \{b, c\}$ ، $A = \{c, d, e\}$ باشند، جدول های زیر را کامل کنید.

A'	B'	$A' \cap B'$	$A \cup B$	$(A \cup B)'$
$A' \cup B'$	$(A \cap B)$	$(A \cap B)'$	$A - B$	$A \cap B'$

C	$(C)'$	A'	$(A)'$

A'	B'	$A' \cap B'$	$A \cup B$	$(A \cup B)'$
$\{a, b\}$	$\{a, b, e\}$	$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$	$\{a\}$

پاسخ:

$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{a\}$ همان طور که می بینید:

$A' \cup B'$	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A - B$	$A \cap B'$
$\{a, b, d, e\}$	$\{c\}$	$\{a, b, d, e\}$	$\{d, e\}$	$\{d, e\}$

$A - B = A \cap B'$ پس:

$(C)'$	C	$(C)'$	A'	$(A)'$
$\{b, d, e\}$	$\{b, d, e\}$	$\{b, d, e\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d, e\}$

بنابراین $(C)'$ C

توجه: ۱. با توجه به جدول بالا خواهیم داشت: متمم متمم هر مجموعه، برابر با خود مجموعه است، یعنی: $(A')' = A$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

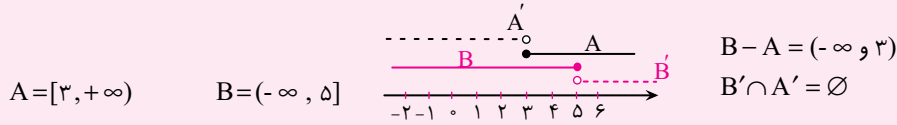
$A - B = A \cap B'$

۲. اگر $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ باشند. پس، $A \subset B$ است و $A' = \{c, d, e, f\}$ و $B' = \{d, e, f\}$ هستند.

همان طور که می بینید $B' \subset A'$ پس می توان گفت $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$.

مثال:

۱. اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ باشند، مجموعه‌های $B - A$ و $B' \cap A'$ را مشخص کنید.



پاسخ:

۲. اگر $A' = \{2, 4, 6\}$ و $B' = \{1, 2, 3\}$ باشد اعضای مجموعه $(A \cup B)'$ را بنویسید. (مرجع را نمی‌شناسیم).

$(A \cup B)' = A' \cap B' = \{2\}$ **پاسخ:**

۳. اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ مجموعه مرجع و $A = \left\{x \mid \frac{12}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$ و $B = \left\{x \mid \frac{12}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$ دو زیرمجموعه از U باشند، مطلوب است $A' \cup B'$.

پاسخ: $\frac{12}{x-1} \in \mathbb{N}$ یعنی، $(x-1)$ مقسوم علیه ۱۲ باشد، تا ۱۲ بر آن بخش پذیر شود و حاصل عدد طبیعی شود.

12 مقسوم علیه‌های $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$(x-1) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2, \dots, x-1=12 \Rightarrow x=13$

$\Rightarrow A = \{2, 3, 4, 5, 7, 13\} \Rightarrow A' = \{1, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15\}$

$x+1=1 \Rightarrow x=0$

به همین دلیل $(x+1) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (زیرا $B \notin U$)

$x+1=2 \Rightarrow x=1$ $x+1=4 \Rightarrow x=3$ $x+1=6 \Rightarrow x=5$

$B = \{1, 2, 3, 5, 11\} \Rightarrow B' = \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$

$A' \cup B' = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 4, 6, 7, \dots, 15\}$

راه دوم: می‌دانیم $(A \cap B)' = A' \cup B'$ پس:

تمرین‌های امتحانی

۱. در ستون سمت راست مرجع مجموعه‌های شماره زوج، اعداد حقیقی و مرجع مجموعه‌های شماره فرد، اعداد صحیح هستند. هر مجموعه از ستون سمت راست را به متمم آن در ستون چپ وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
الف. $\{\dots, -7, -6\} \cup \{6, 7, 8, \dots\}$	۱. $\{\dots, -2, 0, +2, \dots\}$
ب. $\mathbb{R} - [3, 5]$	۲. $\{x x \leq 0\}$
پ. $\{9, 8, 7, \dots\}$	۳. $\{-5, -4, -3, \dots, +5\}$
ت. $(0, +\infty)$	۴. $[3, 5]$
ث. $(-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$	۵. $\{10, 11, 12, \dots\}$
ج. $\{\dots, -3, -1, +1, +3, \dots\}$	۶. $(3, 5]$

۲. اگر $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $B' = \{-1, 0, 1\}$ باشد، اعضای $A - B$ را بنویسید.

۳. اگر $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ و $A' \cap B' = \{c, d, e\}$ باشد، اعضای $A \cup B$ را بنویسید.

۴. در یک آموزشگاه موسیقی ۲۰ نفر آموزش تار می‌بینند، ۱۵ نفر پیانو و ۵ نفر هم در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. این آموزشگاه ۷۰ نفر هنرجو دارد.

الف. چند نفر آموزش تار یا پیانو می‌بینند؟
ب. چند نفر فقط تار می‌آموزند؟

پ. چند نفر فقط یکی از این ۲ ساز را آموزش می‌بینند؟
ت. چند نفر نه هنرجوی تار هستند و نه پیانو؟

۵. در یک مهمانی ۱۸ نفر چای و ۱۷ نفر شربت نوشیده‌اند، که از بین آن‌ها ۱۰ نفر هم چای و هم شربت نوشیده‌اند. اگر تعداد کل افراد ۳۰ نفر باشد:

الف. چند نفر نه چای نوشیده‌اند و نه شربت؟
ب. چند نفر فقط چای نوشیده‌اند؟

پ. چند نفر فقط یکی از این دو نوع نوشیدنی را خورده‌اند؟
ت. چند نفر دست‌کم یکی از این دو نوع نوشیدنی را خورده‌اند؟

۶. دبیرستانی جهت کلاس‌های تقویتی پایه دهم، لیستی از دانش‌آموزان متقاضی آماده کرده است. از ۲۵ نفری که در کلاس ریاضی ثبت نام کرده‌اند، ۷ نفر آن‌ها عربی را نیز تقاضا داده‌اند و ۱۰ نفرشان برای درس فیزیک نیز نام‌نویسی کرده‌اند. ۵ نفر فقط کلاس فیزیک و ۲ نفر هم عربی و هم فیزیک ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱ نفر بخواهد در هر سه کلاس شرکت کند و کل متقاضیان ۳۵ نفر باشند:

الف. چند دانش‌آموز فقط در کلاس ریاضی ثبت نام کرده‌اند؟
ب. جمعیت کلاس عربی را حساب کنید.

پ. چند دانش‌آموز فقط در یکی از درس‌ها ثبت نام کرده‌اند؟

راهنمایی: از رسم نمودار ون کمک بگیرید.

۷. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع (U) باشند داشته باشیم: $n(U)=40$ ، $n(A)=20$ ، $n(B')=28$ و $n(A \cap B)=10$ ، مطلوب است:

الف. $n(A \cup B)$ ب. $n(A')$ پ. $n(A \cup B')$ ت. $n(A' \cap B')$

راهنمایی: $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A)$

۸. اگر $U = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 7\}$ ، $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}, 4 \leq k \leq 7\}$ ، $B = \{14, 17, 20\}$ و $C = B' \cap A$ مفروض باشند،

حاصل عبارت $(A \cup B)' \cap C'$ چیست؟

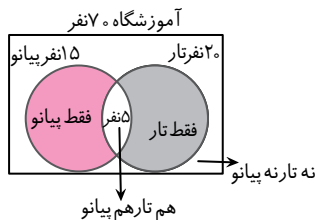
۹. اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ ، $a \in A' - B'$ ، $b \in A - B$ ، $c \notin B - A$ و $A \cap B = \{d, e\}$ باشند، اعضای A و B را مشخص کنید.

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱. الف ← (۳) ت ← (۲) ج ← (۱)

ب ← (۴) پ ← (۵) ث ← (۶)

ت. $70 - (10 + 15 + 5) = 40$ نفر
هر دو ساز فقط تار فقط پیانو



۲. $A - B = A \cap B' = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$

۳. $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{c, d, e\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{a, b, f, g\}$

۴. افراد کلاس تار: A افراد کلاس پیانو: B

الف. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 5 = 30$

ب. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 5 = 15$

پ. ۱۵ نفر در کلاس تار یا ۱۰ نفر فقط در کلاس پیانو شرکت کرده‌اند.
 $10 + 15 = 25$

۵. $n(A) = 18$ ، $n(B) = 17$ ، $n(A \cap B) = 10$ ، $n(U) = 30$
چای شربت هر دو

الف. $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

$= 30 - (18 + 17 - 10) = 5$

$$n(B) = \frac{40}{28} - \frac{n(B')}{28} = 12$$

$$n(A') = \frac{40}{28} - \frac{20}{28} = 20$$

ب.

$$n(A \cap B') = n(A - B) = \frac{28}{28} - \frac{10}{28} = 10$$

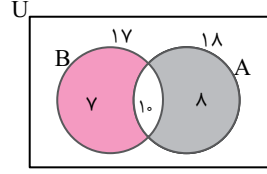
پ.

$$n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = \frac{12}{28} - \frac{10}{28} = 2$$

ت.

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = \frac{40}{28} - \frac{22}{28} = 18$$

ث.



$$n(A - B) = \frac{18}{28} - \frac{10}{28} = 8$$

ب.

$$n((A - B) \cup (B - A)) = 8 + 7 = 15$$

فقط شربت فقط چای

پ.

$$n(A \cup B) = \frac{18}{28} + \frac{17}{28} - \frac{10}{28} = 25$$

ت.

$$U = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$$

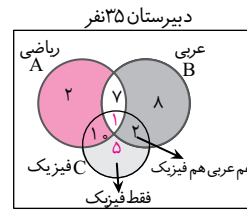
$$A = \{11, 14, 17, 20\} \quad B' = \{5, 8, 11, 23\}$$

$$C = B' \cap A = \{11\}$$

$$(A \cup B)' \cap C' = ((A \cup B) \cup C)'$$

$$= (\{11, 14, 17, 20\})' = \{5, 8, 23\}$$

۸



۶ الف. ۲ نفر

$$35 - (2 + 7 + 1 + 2 + 10 + 5) = 8 \text{ فقط عربی}$$

ب.

$$\rightarrow n(B) = 8 + 7 + 1 + 2 = 18 \text{ جمعیت کلاس عربی}$$

۹

$$2 + 8 + 5 = 15 \text{ نفر}$$

فقط عربی
فقط فیزیک
فقط ریاضی

پ.

$$\left. \begin{aligned} a \in A' - B' &\Rightarrow a \in A', a \notin B' \Rightarrow a \notin A, a \in B \\ b \in A - B &\Rightarrow b \in A, b \notin B \\ c \notin B - A &\Rightarrow c \in A, c \notin B \end{aligned} \right\}$$

c عضو B نیست زیرا: $\{d, e\}$

$$A = \{b, c, d, e\}$$

$$B = \{a, d, e\}$$

$$n(A \cup B) = \frac{20}{28} + \frac{12}{28} - \frac{10}{28} = 22 \text{ الف. ۷}$$